

Física Teórica II, I-2015, Juan Pablo Paz

Práctica 9: Momento angular y Problemas 3D

1. Construya los armónicos esféricos Y_1^m . Para ello, resuelva primero $L_+ Y_1^1 = 0$ (L_+ en la representación \vec{r}) y aplique luego el operador L_- a Y_1^1 (previamente normalizado) para hallar los otros dos restantes. Usando la matriz de rotaciones, escriba la combinación lineal de estos estados que es autoestado de L_y con autovalor \hbar . Verifique su resultado aplicándole L_y en la representación \vec{r} .
2. La función de onda de una partícula sujeta a un potencial esféricamente simétrico $V(r)$ está dada por:

$$\Psi(\vec{r}) = (x + y + 3z) f(r)$$

- a) ¿Es Ψ autofunción de L^2 ? Si es así, ¿cuál es el valor de l ? Si no es así, ¿cuáles son los posibles valores de l que pueden ser obtenidos cuando se mide L^2 ?
 - b) ¿Cuáles son las probabilidades de hallar a la partícula en los distintos estados con m definido?
3. La parte angular de la función de onda de un rotor rígido con un Hamiltoniano $H = \mathbf{L}^2/2I$ esta dada por

$$\langle \hat{\mathbf{n}} | \psi(0) \rangle = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta \sin \phi \quad (1)$$

- a) Halle $\langle \hat{\mathbf{n}} | \psi(t) \rangle$. *Sugerencia:* exprese la función de onda en términos de los $Y_{l,m}$.
 - b) Si se mide L_z . ¿Qué valores pueden obtenerse y con que probabilidad?
 - c) ¿Cuál es el valor de $\langle L_x \rangle$?
 - d) Si ahora se mide L_x . ¿Qué resultados pueden obtenerse y con que probabilidad?
4. Consideren un oscilador armónico tridimensional descrito por el Hamiltoniano

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m [\omega_{\perp}^2 x_3^2 + \omega_{\parallel}^2 (x_1^2 + x_2^2)]$$

Muestre que L_3 conmuta con H y por ende es una constante de movimiento, sin embargo no es así para L_1 y L_2 . ¿Qué puede decir de L^2 ?

5. Sean $\Psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \phi)$ las soluciones del átomo de hidrógeno. Sean $R_{nl} = \frac{u_{nl}}{r}$ las funciones radiales reducidas.
 - a) Mostrar que u_{10}^2 tiene un máximo en $r = a_0$ (el radio de Bohr).
 - b) Calcular la posición para la cual la densidad de probabilidad es máxima, para el estado $n = 2, l = 1$.
 - c) Calcular el valor medio $\langle r \rangle$ en dicho estado
 - d) Si no coinciden, explicar por qué hay diferencias
6. Usando la regla de recursión, demostrar que la solución radial del átomo de hidrógeno cumple con

$$R_{n(n-1)} = N_n r^{n-1} e^{-r/(na_0)} \quad (2)$$

7. Mostrar que un estado estacionario nl del átomo de hidrógeno cuyo momento angular es máximo
- a) $\langle r \rangle = a_0 n(n + \frac{1}{2})$
 - b) $\langle r^2 \rangle = a_0^2 n^2 (n + 1)(n + \frac{1}{2})$
 - c) Usar los resultados anteriores para mostrar que si n y l son muy grandes el electrón está localizado cerca de la superficie de una esfera de radio $a_0 n^2$ y su energía es igual a la de un electrón clásico
 - d) Calcular el valor mas probable del radio para $l = n - 1$
8. La función de onda de un átomo de hidrógeno es:

$$\Psi = \frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{\pi}} Z^{3/2} (6 - Zr) Zr e^{-\frac{Zr}{3}} \cos \theta$$

- a) Determinar los valores de los números cuánticos n , l y m_l de Ψ por inspección.
- b) Generar otra función con los mismos valores de n y l , pero con $m_l + 1$.
- c) Determinar el valor más probable de r en el estado especificado por Ψ , para $Z = 1$.

9. Oscilador Armónico isotrópico en 3-d

- a) Hallar el espectro y la degeneración de los estados de un oscilador armónico isotrópico en 3 dimensiones, en coordenadas cartesianas, para los primeros estados con $N = n_x + n_y + n_z \leq 4$
- b) Dibujar el espectro en un gráfico N vs. l para un oscilador armónico tridimensional.
- c) Comparar la degeneración de los estados en coordenadas esféricas, con los obtenidos en coordenadas cartesianas.
- d) Señalar la paridad de los estados en coordenadas esféricas.