Física Teórica II, I-2015, Juan Pablo Paz
Práctica 11: Simetrías

1. Calcule los tres niveles de energía mas bajos, junto con sus degeneraciones, para los siguientes sistemas (suponga que se trata de partículas distinguibles de igual masa):

   a) Tres partículas no interactuantes de espín 1/2 en una caja de longitud L.

   b) Cuatro partículas no interactuantes de espín 1/2 en una caja de longitud L.

2. Sea $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ el operador de traslación con vector despazamiento $\mathbf{d}$, $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}},\phi)$ el operador de rotación ($\hat{\mathbf{n}}$ y ϕ son respectivamente el eje y el ángulo de rotación) y Π el operador de paridad. ¿Cuáles de los siguientes pares de operadores conmutan? ¿Por qué?

   a) $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ y $\mathcal{T}_{\mathbf{d}'}$ ($\mathbf{d}$ y $\mathbf{d}'$ en distintas direcciones).

   b) $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}},\phi)$ y $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}',\phi')$ ($\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{n}}'$ en distintas direcciones).

   c) $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ y Π.

   d) $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}},\phi)$ y Π.

3. Se sabe que un estado cuántico $|\Phi\rangle$ es simultaneamente autoestado de dos operadores hermíticos A y B que anticonmutan. ¿Qué puede decir sobre los correspondientes autovalores de A y B para este estado? Ilustre el resultado usando el operador paridad y el operador de momentos (utilice que $\Pi = \Pi^{-1} = \Pi^{\dagger}$).

4. Considere dos autoestados del operador paridad
$$\Pi|\alpha\rangle = \epsilon_\alpha |\alpha\rangle \qquad \Pi|\beta\rangle = \epsilon_\beta |\beta\rangle \ ,$$
donde los autovalores ϵ_α y ϵ_β pueden ser 1 o -1. Muestre que
$$\langle\beta|\mathbf{x}|\alpha\rangle = 0$$
salvo si $\epsilon_\alpha = -\epsilon_\beta$. Relacione este resultado con el argumento usual $\int \phi_\beta^* \mathbf{x} \phi_\alpha \mathrm{d}^3\mathbf{x} = 0$ si ϕ_α y ϕ_β tienen la misma paridad. ¿Qué ocurre con $\langle\beta|\mathbf{p}|\alpha\rangle$? ¿Y con $\langle\beta|\mathbf{S}\cdot\mathbf{x}|\alpha\rangle$?

5. Considere la función de onda de una partícula sin espín
$$\langle\mathbf{x}|\alpha l m\rangle = R_\alpha(r) Y_l^m(\theta,\phi) \ .$$
¿Qué puede decir del $V(\mathbf{r})$ en que se encuentra la partícula? Usando las expresiones de los armónicos esféricos, muestre que frente a la transformación de paridad $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$, el estado se transforma como
$$\Pi|\alpha l m\rangle = (-1)^l |\alpha l m\rangle \ .$$
¿Qué puede decir de las propiedades de conmutación de Π y $\mathbf{L}$?

6. Una partícula de espín 1/2 está ligada a un centro fijo por un potencial esféricamente simétrico. Considere las funciones espín-angulares
$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}_l^{j=l\pm 1/2,m} &= \pm\sqrt{\frac{l\pm m+1/2}{2l+1}} Y_l^{m-1/2}(\theta,\phi)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sqrt{\frac{l\mp m+1/2}{2l+1}} Y_l^{m+1/2}(\theta,\phi)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2l+1}}\begin{pmatrix}\pm\sqrt{l\pm m+1/2}\,Y_l^{m-1/2}(\theta,\phi)\\ \sqrt{l\mp m+1/2}\,Y_l^{m+1/2}(\theta,\phi)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$
que son autofunciones de L^2, S^2, J^2, y J_z simultaneamente.

a) Escriba la función espín-angular para momento angular orbital nulo $\mathcal{Y}_{l=0}^{j=1/2,m=1/2}$.

b) Exprese $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x})\,\mathcal{Y}_{l=0}^{j=1/2,m=1/2}$ en términos de $\mathcal{Y}_{l}^{j,m}$. El operador $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x}$ describe la interacción entre un campo magnético que crece linealmente con la posición y el espín. Potenciales de este tipo se utilizan en trampas magneto-ópticas para atrapar átomos magnéticos.

c) Muestre que el resultado obtenido en (b) se puede interpretar usando las propiedades de transformación de $\mathbf{S}\cdot\mathbf{x}$ ante rotaciones e inversión espacial (paridad).

7. Evalúe los siguientes elementos de matriz. Si alguno se anula, explique por qué usando argumentos de simetría.

   a) $\langle n=2, l=1, m=0|x|n=2, l=0, m=0\rangle$.

   b) $\langle n=2, l=1, m=0|p_z|n=2, l=0, m=0\rangle$.

   c) $\langle L_z\rangle$ para un electrón en un campo central con $j=9/2$, $m=7/2$, y $l=4$.

   En (a) y (b), $|nlm\rangle$ son los autoestados de energía del átomo de hidrógeno ignorando los efectos de espín.

8. Debido a interacciones débiles existentes entre los electrones atómicos y el núcleo, se puede tomar un potencial que viola paridad de la siguiente forma:

$$V = \lambda\left[\delta^3(\mathbf{x})\mathbf{S}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{S}\cdot\mathbf{p}\delta^3(\mathbf{x})\right]$$

   donde $\mathbf{S}$ y $\mathbf{p}$ son los operadores de espín y de momento del electrón respectivamente, y se supone que el núcleo está ubicado en el origen de coordenadas. Como resultado, el estado fundamental de un átomo alcalino, usualmente caracterizado por $|n,l,j,m\rangle$, en realidad contiene pequeñas contribuciones provenientes de otros autoestados en la siguiente manera:

$$|n,l,j,m\rangle \to |n,l,j,m\rangle + \sum_{n'l'j'm'} C_{n'l'j'm'}|n',l',j',m'\rangle.$$

   Usando solamente consideraciones de simetría, ¿qué puede decir acerca de los (n',l',j',m') que dan contribuciones no nulas? Suponga que las funciones de onda radiales y los niveles de energía son conocidos. Indique como calcularía los $C_{n'l'j'm'}$. ¿Se obtienen más restricciones acerca de los (n',l',j',m')?