Física Teórica II, I-2015, Juan Pablo Paz
Práctica 13: Perturbaciones dependientes del tiempo

1. Consideren un átomo alcalino, es decir, que puede ser aproximadamente descripto por una función de onda hidrogenoide con un electrón (con espín, claro): $|n, m, m_l, m_s\rangle$. Si se enciende un campo eléctrico cuadrupolar que transiciones son posibles? Consideren en particular los campos cuadrupolares $\alpha_1(3z^2 - r^2)$ y $\alpha_2 xy$. Estas posibles transiciones suele llamarse reglas de selección.

2. Considere el oscilador armónico unidimensional de frecuencia ω_0, que a $t < 0$ está en el estado fundamental. A $t = 0$ se enciende una perturbación
$$V(t) = F_0 x \cos\omega t$$
donde F_0 es una constante. Obtenga una expresión para el valor de expectación $\langle x\rangle$ como función del tiempo usando la teoría de perturbaciones al orden mas bajo no nulo. ¿Es válido este procedimiento para $\omega \approx \omega_0$?

3. Un oscilador armónico unidimensional está en el estado fundamental para $t < 0$. A tiempos positivos se lo somete a una fueza dependiente del tiempo pero especialmente uniforme en la dirección x dada por
$$F(t) = F_0 e^{-t/\tau}$$
   a) Usando la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo, obtenga la probabilidad de encontrar el oscilador en el primer estado excitado a primer orden. Muestre que en el límite $t \to \infty$, la expresión es independiente del tiempo. ¿Es esto razonable o sorprendente?

   b) ¿Podemos encontrar al oscilador en estados excitados de mayor energía?

4. El hamiltoniano de un sistema de dos niveles
$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1^0 & 0 \\ 0 & E_2^0 \end{pmatrix}$$
es perturbado por el potencial
$$V(t) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda\cos\omega t \\ \lambda\cos\omega t & 0 \end{pmatrix}$$
donde λ es real.

   a) A $t = 0$ el sistema está en el estado
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   Usando la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo y asumiendo que $E_1^0 - E_2^0$ no es cercano a $\pm\hbar\omega$, derive una expresión para la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   para tiempos positivos.

b) ¿Por qué este procedimiento no es válido cuando $E_1^0 - E_2^0 \approx \pm\hbar\omega$?

5. Considere un sistema compuesto por dos objetos de espín 1/2. Para $t < 0$ el hamiltoniano no depende del espín y puede igualarse a cero corriendo la escala de energía. Para $t > 0$ el hamiltoniano está dado por
$$H = \left(\frac{4\Delta}{\hbar^2}\right) \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$$
Suponga que el sistema está en el estado $|+-\rangle$ para $t < 0$. Encuentre la probabilidad de que a un tiempo t el sistema se halle en cada uno de los estados $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$, y $|--\rangle$

   a) resolviendo el problema exactamente,

   b) suponiendo que vale la teoría de perturbaciones a primer orden, siendo H la perturbación que se enciende a $t = 0$.
   ¿Bajo qué condiciones (b) da resultados correctos?

6. Considere un sistema de dos niveles con $E_1 < E_2$ y un potencial dependiente del tiempo que conecta los dos niveles
$$V_{11} = V_{22} = 0, \qquad V_{12} = V_{21}^* = \gamma e^{i\omega t}$$
donde γ es real. A $t = 0$ se sabe que sólo el nivel mas bajo está poblado, es decir que $c_1(0) = 1$, y $c_2(0) = 0$.

   a) Encuentre $|c_1(t)|^2$ y $|c_2(t)|^2$ para $t > 0$ en forma exacta resolviendo la ecuación diferencial
$$i\hbar \frac{dc_k}{dt} = \sum_{n=1}^{2} V_{kn}(t) e^{i\omega_{kn} t} c_n, \qquad k = 1, 2$$

   b) Resuelva el mismo problema usando la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo al orden mas bajo no nulo. Compare con el resultado hallado en (a) para pequeños valores de γ. Trate por separado los siguientes casos:

      i) ω muy diferente de ω_{12}, y

      ii) $\omega \approx \omega_{12}$.

7. El estado fundamental de un átomo de hidrógeno
$$\psi_{n=1,l=0}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{a_0}\right)^{2/3} e^{-Zr/a_0}$$
es sujeto a la acción de un potencial dependiente del tiempo
$$V(\mathbf{x}, t) = V_0 \cos(kz - \omega t)$$
Usando la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo, obtenga una expresión para la tasa de la transición en la cual el electrón es emitido con momento $\mathbf{p}$. En particular, muestre como calcular la distribución angular del electrón emitido en términos de los ángulos θ y ϕ medidos respecto del eje z. Discuta la relación de este problema con un

modelo más realista del efecto fotoeléctrico.
Nota: Si encuentra un problema de normalización, tome a la función de onda final como

$$\psi_f(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{L^{2/3}}\right) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar}$$

con L suficientemente grande, aunque debería mostrar que los efectos observables son independientes de L.