TEMA 1

P1)

$$H \begin{cases} \pm\hbar\omega_0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mu_1\rangle \pm i|\mu_4\rangle) = |v_{1,2}\rangle \end{cases} \Bigg| \begin{array}{c} \pm\hbar\omega_0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mu_2\rangle \pm |\mu_3\rangle) = |v_{3,4}\rangle \end{array}$$

Energías

Autoestados

Autovalores

$$A \begin{cases} a \\ |\mu_1\rangle \end{cases} \Bigg| \begin{array}{c} a \\ |\mu_4\rangle \end{array} \Bigg| \begin{array}{c} 2a \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mu_2\rangle + |\mu_3\rangle) \end{array} \Bigg| \begin{array}{c} -2a \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mu_2\rangle - |\mu_3\rangle) \end{array}$$

Autoestados

$$B \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mu_2\rangle - |\mu_4\rangle) \end{cases} \Bigg| \begin{array}{c} b \\ |\mu_1\rangle \end{array}$$

autoval

autoesta

$$B\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{l} b = 0 \\ a = -c \end{array}$$

(Sólo se necesita este autovector)

Estado inicial:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}|\mu_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\mu_2\rangle + \frac{1}{2}|\mu_3\rangle$$

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(|v_1\rangle + |v_2\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(|v_3\rangle + |v_4\rangle) + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(|v_3\rangle - |v_4\rangle)$$

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}|v_1\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|v_2\rangle + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)|v_3\rangle + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)|v_4\rangle$$

$$\text{Prob}(\hbar\omega_0) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2$$

$$\text{Prob}(-\hbar\omega_0) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2$$

$\sum \text{Prob} = 1$ ✓

húsares

$\langle H \rangle$: $\quad H \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} i \end{pmatrix}$

$$\hbar\omega_0 \left(\frac{1}{2} \;\; \frac{1}{\sqrt{2}} \;\; \frac{1}{2} \;\; 0 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} i \end{pmatrix} = \hbar\omega_0 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}}$$

ó usando:

$$\langle H \rangle = \text{Prob}(\hbar\omega_0)\cdot\hbar\omega_0 + \text{Prob}(-\hbar\omega_0)(-\hbar\omega_0)$$

$$\langle H^2 \rangle = (\hbar\omega_0)^2 \langle \mathbb{I} \rangle = \hbar^2\omega_0^2 .$$

$$\langle \Delta H \rangle = \sqrt{\hbar^2\omega_0^2 - \left(\frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}}$$

b) Observamos que los autoestados de H son autoestados de A.
(H y A conmutan)

Estado

$\text{Prob}(2a) = \left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2$; $|v_3\rangle$

$\text{Prob}(-2a) = \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2$; $|v_4\rangle$

$\text{Prob}(a) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}(|v_1\rangle$ $|v$

Si se midió $2a$ el estado es $|v_3\rangle$ que es autoestado de H, $|v_3, t\rangle = e^{-i\omega_0 t}|v_3\rangle$

$\therefore$ Se mide $2a$ si se vuelve a medir A un tiempo t después.

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}|\psi(0)\rangle$$

c) i) $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega_0 t}|v_1\rangle + e^{i\omega_0 t}|v_2\rangle\right)$

$$+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-i\omega_0 t}$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{i\omega_0 t}.$$

ii) Si se midió A y se obtuvo $2a$

$$|\psi(0)\rangle = |v_3\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega_0 t}|v_3\rangle$$

a todo tiempo puede volver a obtenerse $2a$

A y H conmutan ⇒ A es una magnitud conservada.

iii) Si se mide B a $t=0$ y se obtiene 0.

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_2\rangle - |u_4\rangle\right)$$

pero $|u_4\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|v_2\rangle - |v_1\rangle$

$$|u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|v_3\rangle + |v_4\rangle\right)$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\left(e^{-i\omega_0 t}|v_3\rangle + e^{i\omega_0 t}|v_4\rangle - i\,e^{i\omega_0 t}|v_2\rangle + i\,e^{-i\omega_0 t}|v_1\rangle\right)$$

$$\text{Prob}(B=0,t) = |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2$$

$$= \left| \frac{1}{4} \left(e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t} \right) \right|^2$$

$$\text{Prob}(B=0,t) = \cos^2 \omega_0 t$$

P2) $H = \hbar\omega a^\dagger a + i\hbar\Lambda\underbrace{(a^{\dagger 2}e^{-2i\omega t} - a^2 e^{2i\omega t})}$

Onda clásica de frecuencia 2ω generando 2 fotones de frecuencia ω.

a) Ecuación de Heisenberg para $a(t)$

i) $i\hbar\dot{a}(t) = [a, H]$

$i\hbar\dot{a}(t) = \hbar\omega[a, a^\dagger a] + i\hbar\Lambda[a, a^{\dagger 2}]e^{-2i\omega t}$

• $[a, a^\dagger a] = \underbrace{[a, a^\dagger]}_{1}a + a^\dagger\underbrace{[a, a]}_{0} = a$

• $[a, a^\dagger a^\dagger] = \underbrace{[a, a^\dagger]}_{1}a^\dagger + a^\dagger\underbrace{[a, a^\dagger]}_{1} = 2a^\dagger$

$$\begin{cases} i\dot{a}(t) = \omega a + 2i\Lambda a^\dagger e^{-2i\omega t} \\ -i\dot{a}^\dagger(t) = \omega a^\dagger - 2i\Lambda a e^{2i\omega t} \end{cases}$$ (adjo la ecuación anterior)

ii) Si $a(t) = b(t)e^{-i\omega t}$ $\quad a^\dagger(t) = b^\dagger(t)e^{i\omega t}$

$\dot{a}(t) = \dot{b}(t)e^{-i\omega t} - i\omega b(t)e^{-i\omega t}$; $\dot{a}^\dagger(t) = \dot{b}^\dagger(t)e^{i\omega t} + i\omega b^\dagger e^{i\omega t}$

$i\dot{b}(t)\cancel{e^{-i\omega t}} + \cancel{\omega b(t)e^{-i\omega t}} = \cancel{\omega b(t)e^{-i\omega t}} + 2i\Lambda b^\dagger(t)\cancel{e^{-i\omega t}}$

$$\begin{cases} \dot{b}(t) = 2\Lambda b^\dagger(t) \\ \dot{b}^\dagger(t) = 2\Lambda b(t) \end{cases}$$

Derivando la primera ecuación: (y usando la segunda ecuación)

$$\ddot{b}(t) = (2\Lambda)^2 b(t)$$

$$b(t) = A\cosh 2\Lambda t + B\sinh 2\Lambda t.$$

debe satisfacer la ecuación de primer orden

(d&go) $$b^+(t) = A^+\cosh 2\Lambda t + B^+\sinh 2\Lambda t$$

$$\Rightarrow \dot{b}^+ = 2\Lambda(A^+\sinh 2\Lambda t + B^+\cosh 2\Lambda t) = 2\Lambda(A\cosh 2\Lambda t + B\sinh 2\Lambda t)$$

(derivo)

$$\therefore \quad A^+ = B \qquad B^+ = A.$$

$$b(0) = A \qquad , \quad b^+(0) = B$$

$$\therefore \begin{cases} b(t) = b(0)\cosh 2\Lambda t + b^+(0)\sinh 2\Lambda t \\ b^+(t) = b^+(0)\cosh 2\Lambda t + b(0)\sinh 2\Lambda t \end{cases}$$

iii) Si a $t=0$ el estado del campo es un estado de vacío $|0\rangle$

Hallar el valor medio del número de fotones a tiempo t, así como la dispersión $\langle \Delta N\rangle$

$$N = a^+a = b^+b$$

En esquema de Heisenberg

$$\langle N\rangle = \langle 0| b^+(t) b(t)|0\rangle$$

$$b(t)|0\rangle = e^{-i\omega t}\sinh 2\Lambda t\,|1\rangle$$

$$b^+(t)b(t)|0\rangle = e^{-2i\omega t}\sinh 2\Lambda t\cosh 2\Lambda t\sqrt{2}|2\rangle + e^{i\omega t}e^{-i\omega t}\sinh 2\Lambda t^2\,|0\rangle$$

$$\therefore \langle N\rangle = (\sinh 2\Lambda t)^2$$

P3) $O_1 = \sigma_y \otimes \sigma_z$ $O_2 = \sigma_z \otimes \sigma_y$

a) $O_1 O_2 - O_2 O_1 = \sigma_y \otimes \sigma_z . \sigma_z \otimes \sigma_y$
$- \sigma_z \otimes \sigma_y . \sigma_y \otimes \sigma_z$

$= \sigma_y \sigma_z \otimes \sigma_z \sigma_y$
$- \sigma_z \sigma_y \otimes \sigma_y \sigma_z$

$= \sigma_y \sigma_z \otimes \sigma_z \sigma_y$
$- (\cancel{-} \sigma_y \sigma_z) \otimes (\cancel{-} \sigma_z \sigma_y)$

$= 0$

Donde se usó $\sigma_i \sigma_j = - \sigma_j \sigma_i$ $i \neq$

$O_1 |\sigma_1\rangle = \sigma_1 |\sigma_1\rangle$

aplicamos σ_1 : $O_1^2 |\sigma_1\rangle = \sigma_1^2 |\sigma_1\rangle$

pero $O_1^2 = \sigma_y \otimes \sigma_z \; \sigma_y \otimes \sigma_z = \sigma_y^2 \otimes \sigma_z^2$
$= \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} = \mathbb{1}$

$\Rightarrow$ $|\sigma_1\rangle = \sigma_1^2 |\sigma_1\rangle$

$\therefore$ $\sigma_1^2 = 1 \Rightarrow \sigma_1 = \pm 1$ (autoval

Del mismo modo $O_2^2 = \mathbb{1}$

b) $\Rightarrow \sigma_2 = \pm 1$ (autoval

$\Pi_j = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \sigma_j O_j)$

$\Pi_j^2 = \frac{1}{4} (\mathbb{1} + \sigma_j O_j + \sigma_j O_j + \underbrace{\sigma_j^2 O_j^2}_{\mathbb{1}})$

$\therefore$ $\Pi_j^2 = \Pi_j$ $j = 1, 2$

proyector

c) $O_j \Pi_j = O_j \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \sigma_j O_j)$

$$= \frac{1}{2}(O_j + \sigma_j \underbrace{O_j^2}_{\mathbb{1}})$$

$$= \frac{O_j^2}{2}(O_j + \sigma_j \mathbb{1}) = \sigma_j \frac{1}{2}(\sigma_j O_j + \sigma_j^2 \mathbb{1})$$

$$O_j \Pi_j = \sigma_j \Pi_j$$

d) Π_1 proyecta sobre autoestado de O_1 con autovalor σ_1

Π_2 proyecta sobre autoestado de O_2 con autovalor σ_2

$\Pi_1 . \Pi_2$ proyecta sobre ambos subespacios.

$$\frac{1}{2}(\mathbb{1} - O_1)\frac{1}{2}(\mathbb{1} - O_2) = \frac{1}{4}(\mathbb{1} - O_1 - O_2 + O_1 O_2)$$

Usamos este proyector sobre un estado producto: $|00\rangle$ autoestado de $\sigma_z \otimes \sigma_z$

$(\sigma_y|0\rangle = i|1\rangle \; ; \; \sigma_y|1\rangle = -i|0\rangle)$

$$|\psi_{-1,-1}\rangle \propto \frac{1}{4}\left(|00\rangle - i|10\rangle - i|01\rangle + (i)(i)(-)|11\rangle\right)$$

$$|\psi_{-1,-1}\rangle = \frac{1}{2}\left(|00\rangle + |11\rangle - i|10\rangle - i|01\rangle\right)$$

(normalizado)

e) $\rho_{\sigma_1\sigma_2} = \Pi_{\sigma_1}\Pi_{\sigma_2}$ (proyector)

$$\rho_{\sigma_1\sigma_2} = \frac{1}{4}\left(\mathbb{I} + \sigma_1 O_1 + \sigma_2 O_2 + \sigma_1\sigma_2 O_1 O_2\right)$$

f) Estado de Bell: $(m_{1,2} = \pm 1)$

$$M_1 |B_{m_1 m_2}\rangle = m_1 |B_{m_1 m_2}\rangle$$

$$M_2 |B_{m_1 m_2}\rangle = m_2 |B_{m_1 m_2}\rangle$$

$$M_1 = \sigma_x \otimes \sigma_x \qquad M_2 = \sigma_z \otimes \sigma_z$$

$$P(\sigma_1,\sigma_2 \| B_{m_1 m_2}\rangle) = \langle B_{m_1 m_2} | \rho_{\sigma_1\sigma_2} | B_{m_1 m_2}\rangle$$

$$O_1 = \sigma_y \otimes \mathbb{I} \cdot \mathbb{I} \otimes \sigma_z$$

$$O_2 = \sigma_z \otimes \mathbb{I} \cdot \mathbb{I} \otimes \sigma_y$$

$$O_1 O_2 = \sigma_y\sigma_z \otimes \sigma_z\sigma_y$$

$$O_1 O_2 = -\sigma_x \otimes \sigma_x = -M_1$$

$$P(\sigma_1\sigma_2 | |B_{m_1 m_2}\rangle) = \frac{1}{4}\Big(\langle B_{m_1 m_2} | B_{m_1 m_2}\rangle + \sigma_1 \overbrace{\langle B_{m_1 m_2} | \sigma_y \otimes \cdots}$$

$$\overbrace{\times\, \mathbb{I}\otimes\sigma_z | B_{m_1 m_2}\rangle} + \sigma_2 \overbrace{\langle B_{m_1 m_2} | \sigma_z \otimes \mathbb{I} \cdot \times \cdots}$$

$$\overbrace{\times\, \mathbb{I}\otimes\sigma_y | B_{m_1 m_2}\rangle} - \sigma_1\sigma_2 \langle B_{m_1 m_2} | M_1 | B \cdots$$

húsares

$$P(\sigma_1 \sigma_2 \,|\, |B_{m_1 m_2}\rangle) = \frac{1}{4}(1 - \sigma_1 \sigma_2 m_1)$$

P4) Entrelazar dos cavidades resonantes (C_1 y C_2)

$$|\psi_{C_1 C_2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_1, 1_2\rangle - |1_1, 0_2\rangle\right)$$

usando un átomo

Usaremos la evolución en una cavidad:

i) Si entra el átomo en $|g0\rangle$ y las cavidades no tienen fotones

⇒ La evolución es una fase

y el estado a la salida será:

$$e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}} |g\rangle \otimes |0_1\rangle \otimes |0_2\rangle$$

no entrelazado

ii) Si entra el átomo en $|e\rangle$ y la cavidad 1 no tiene fotones:

$$U^{(0)}(t) = e^{-i\omega_c t} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} |e0\rangle & |g1\rangle \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cos\Omega_0 t & -\sin\Omega_0 t \\ \sin\Omega_0 t & \cos\Omega_0 t \end{pmatrix} \end{array}$$

usemos un pulso $-\frac{\pi}{2}$ $\left(\Omega_0 t = \frac{\pi}{4}\right)$

a la salida de C_1: $|\psi'\rangle = U^{(0)}_{(\tau)}|e0\rangle$

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e0_1\rangle - |g1_1\rangle\right)$$

iii) A la entrada de C_2:

$$|\psi''\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e0_1\rangle - |g1_1\rangle\right) \otimes |0_2\rangle$$

Usamos un pulso π $\left(\Omega_0 T' = \frac{\pi}{2}\right)$

$$|\psi''\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} U^{(0)}_{(\tau')} |e0_2\rangle \otimes |0_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |g0_2\rangle \otimes |1_1\rangle$$

Se usó que $E_0 = -\frac{\hbar}{2}\Delta = 0$ (caso resonante)

$$|\psi'''\rangle = e^{-i\omega_c \tau'} \frac{1}{\sqrt{2}} |g1_2\rangle \otimes |0_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |g0_2\rangle \otimes |1_1\rangle$$

Si: $e^{-i\omega_c \tau'} = 1$ $\left(\text{considera } \omega_c \tau' = 2n\pi\right)$

$$|\psi'''\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1_2 0_1\rangle - |0_2 1_1\rangle\right) \otimes |g\rangle$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0_1 1_2\rangle - |1_1 0_2\rangle\right) \otimes |g\rangle$$

A menos de la fase común es el estado pedido.

Alternativas.

a) Se puede usar un pulso $\pi/2$ y luego un pulso $-\pi$.

b) Se puede usar átomo en estado $|g\rangle$ pero se necesita un fotón en la cavidad 1 y cero fotones en la cavidad C_2