Física Teórica 2

Segundo cuatrimestre de 2015
Guía 3: Oscilador armónico y potenciales

1. Considere el operador Hamiltoniano correspondiente al oscilador armónico unidimensional

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 X^2.$$

Escriba la ecuación de Schrodinger para un estado estacionario (autoestado de H) e intente resolverla (si no puede, no importa, lo haremos de forma inteligente en el resto de la guía).

2. Suponga que se tiene un operador N con autovalores n y un operador a tales que $[N, a] = -ca$ con $c \in \mathbb{C}$. Llamemos $|n\rangle$ al autoestado de N con autovalor n (supongamos que no hay degeneración).

   a) Muestre entonces que $a|n\rangle$ es autoestado de N con autovalor $n - c$

   b) Si N es hermítico, muestre que $a^\dagger|n\rangle$ es autoestado de N con autovalor $n + c$, con n y c reales. Note que si c es positivo entonces a baja los autovalores y se lo llama *operador de bajada o aniquilación* mientras que $a^\dagger$ los sube y se lo llama *operador de subida o creación*.

3. Considere un oscilador armónico en una dimensión, y las siguientes definiciones

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(X + \frac{iP}{m\omega}\right), \quad a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,,$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(X - \frac{iP}{m\omega}\right), \quad a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,,$$

donde $\{|n\rangle\}_{n\in\mathbb{Z}}$ son autoestados de $N := a^\dagger a$ con autovalor n.

   a) Calcule $[a, a^\dagger]$ y compruebe que se verifiquen las relaciones de conmutación del ejercicio anterior con $c = 1$.

   b) Muestre que los autovalores de N son enteros no negativos, asumiendo que existe el estado $|0\rangle$ (esto lo veremos en el ejercicio 5). Por lo tanto $n \in \mathbb{N}$.

   c) Muestre que $H = \hbar\omega(N + 1/2)$, por lo tanto los autestados de N coinciden con los de H.

   d) Evalúe $\langle m|X|n\rangle$, $\langle m|P|n\rangle$, $\langle m|\{X, P\}|n\rangle$, $\langle m|X^2|n\rangle$ y $\langle m|P^2|n\rangle$

   e) Compruebe que se cumple el teorema del virial para los valores de expectación de la energía cinética y potencial tomados con respecto a un autoestado de la energía.

4. Utilizando los resultados del ejercicio anterior, muestre que los autoestados del oscilador armónico unidimensional satisfacen la siguiente relación,

$$\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta p)^2 \right\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \hbar^2\,.$$

¿Qué ocurre para $n = 0$? ¿Qué condición impone esto sobre la función de onda del estado fundamental?

5. Resuelva la ecuación diferencial $a\,|0\rangle = 0$ para obtener el estado fundamental. Luego obtenga $a^\dagger\,|0\rangle = |1\rangle$, el primer estado excitado del oscilador armónico unidimensional.

6. Considere la función, conocida como función de correlación, definida como

$$C(t) = \langle x(t)x(0)\rangle \,,$$

donde $\langle x(t)\rangle$ es el operador de posición en la representación de Heisenberg. Evalúe explicitamente la función de correlación para el estado fundamental de un oscilador armónico en una dimensión.

7. Considere nuevamente un oscilador armónico en una dimensión. Sin trabajar con las funciones de onda:

   a) Construya una combinación lineal de $|0\rangle$ y $|1\rangle$ que maximice $\langle x\rangle$.

   b) Considere que el oscilador se encuentra a $t = 0$ en el estado hallado en el punto (a). ¿Cuál es el vector de estado para $t > 0$ en la representación de Schrödinger ? Evalúe el valor de expectación $\langle x\rangle$ como función del tiempo para $t > 0$ usando: (i) la representación de Schrödinger, y (ii) la representación de Heisenberg.

   c) Evalue $\left\langle(\Delta x)^2\right\rangle$ como función del tiempo en ambas representaciones.

8. Demuestre que para un oscilador armónico en una dimensión se verifica

$$\left\langle 0 \left| e^{ikX} \right| 0 \right\rangle = \exp\left(-\frac{k^2}{2}\left\langle 0 \left| X^2 \right| 0 \right\rangle\right)$$

donde x es el operador de posición. Ayuda: use el resultado del problema 1.c de la guía 1. Use esto para obtener $\langle 0|X^n|0\rangle$ para todo n.

9. Considere una partícula sujeta a un potencial de oscilador armónico en una dirección. Suponga que a $t = 0$ el estado viene dado por

$$|\varphi\rangle = \exp\left(\frac{-iPd}{\hbar}\right)|0\rangle \,,$$

donde P es el operador de momento y d es un número con dimensiones de longitud. Usando la representación de Heisenberg, evalúe el valor de expectación $\langle X\rangle$ para $t > 0$. Muestre que $|\varphi\rangle$ es autoestado del operador de destrucción a y calcule su autovalor. Interprete el resultado. ¿Qué tipo de estado describe $|\varphi\rangle$?

10. Se definen los estados coherentes de un oscilador armónico en una dimensión como los autoestados del operador de aniquilación a,

$$a\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle \,,$$

donde λ es en general un número complejo (note que a es no hermitíco).

   a) Demuestre que

$$|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2} e^{\lambda a^\dagger}\,|0\rangle$$

   es un estado coherente normalizado.

   b) Demuestre que estos estados verifican la relación de mínima incerteza.

   c) Pruebe que un estado coherente se puede obtener también mediante la aplicación del operador de traslación $\exp(-iPl/\hbar)$ (siendo P el operador de momento y l la distancia desplazada) al estado fundamental.

11. Escriba la función de onda (en el espacio de coordenadas) para el estado especificado en el problema 9 a $t = 0$. Puede usar que (resultado del ej. 5)

$$|0\rangle = \pi^{-1/4} x_0^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x'}{x_0}\right)^2\right] \quad \text{donde} \quad x_0 = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}.$$

Obtenga luego una expresión simple para la probabilidad de que la partícula se encuentre en el estado fundamental a $t = 0$. ¿Cambia esta probabilidad para $t > 0$?

12. Considere un autoestado del operador de destrucción a

$$a\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \ ,$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$.

a) Calcule $\langle H\rangle$, $\langle P\rangle$ y $\langle X\rangle$ en un estado $|\alpha\rangle$ y muestre que satisfacen la misma relación que las variables clásicas $E = p^2/2m + m\omega^2 x^2/2$ para $E \gg \hbar\omega$. ¿Qué condicion impone ésto para los valores de α?

b) Halle la evolución temporal de $|\alpha\rangle$ desarrollándolo en la base $\{|n\rangle\}$ de autoestados de H. Muestre que el estado continúa siendo autoestado del operador a, pero que el autovalor α varía en el tiempo. Dibuje en el plano complejo la evolución de α y muestre como varían $\langle H\rangle$ y $\langle P\rangle$ en el tiempo.

c) Deduzca y resuelva las ecuaciones de evolución en la representación de Heisemberg para los operadores a y $a^\dagger$.

d) Si se mide la energía del sistema en un $t > 0$, ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

13. Considere una partícula sometida a un potencial de la forma

$$V = \begin{cases} kx^2/2 & x > 0 \\ \infty & x < 0. \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la energía del estado fundamental?

b) ¿Cuál es el valor de expectación $\langle X^2\rangle$ para el estado fundamental?

14. Una partícula en una dimensión ($-\infty < x < \infty$) está sometida a una fuerza que puede derivarse de un potencial de la forma

$$V(x) = \lambda x \quad , \quad (\lambda > 0).$$

a) ¿Es el espectro de energía discreto o continuo? Escriba una expresión aproximada para la autofunción de energía especificada por E. Dibujela cualitativamente.

b) Discuta brevemente qué cambios son necesarios si V es reemplazado por $V = \lambda|x|$.

15. Una partícula en una dimensión está atrapada entre dos paredes rígidas separadas una distancia L,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < L \\ \infty & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A $t = 0$ la partícula está "muy concentrada" en $x = L/2$. ¿Cuáles son, estimativamente, las probabilidades relativas de que la partícula se encuentre en distintos autoestados de energía? Escriba la función de onda para $t \geq 0$ (no necesita preocuparse por la normalización absoluta, convergencia u otras cuestiones matemáticas).

16. Un electrón se mueve en la presencia de un campo magnético uniforme en la dirección z ($\mathbf{B} = B\hat{z}$).

   a) Evalúe $[\Pi_x, \Pi_y]$, donde

   $$\Pi_x = p_x - \frac{eA_x}{c} \qquad \Pi_y = p_y - \frac{eA_y}{c} \ . \tag{1}$$

   b) Tenga en cuenta ahora que un *gauge* posible es $A_x = 0$ y $A_y = Bx\hat{y}$. Proponga un estado estacionario tipo onda plana $\psi = e^{i\vec{k}\cdot(z\hat{z}+y\hat{y})} f(x)$. Usando las relaciones de conmutación obtenidas en (a) y las expresiones correspondientes al problema del oscilador armónico unidimensional, muestre que los autovalores de energía de este problema son

   $$E_{kn} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \frac{|eB|\hbar}{mc}\left(n + \frac{1}{2}\right) \ , \tag{2}$$

   donde $n = 0, 1, 2, \ldots$, y $\hbar k_z$ es el "autovalor contínuo" del operador P_z. Notar que hay una frecuencia efectiva dada por $\omega = \frac{eB}{mc}$. Ayuda: complete cuadrados para poder tratar el término lineal en X.