Física Teórica 2

Segundo cuatrimestre de 2015
Guía 5: Suma de momento angular y teorema de Wigner-Eckart

1. Considere una partícula de espín $1/2$ en un estado con $l = 1$.

   a) Encuentre el estado con j_{max} y $m_{j_{max}}$ en términos de los estados $|l, s, m_l, m_s\rangle$.

   b) Use $J_- = L_- + S_-$ para generar todos los estados $|j_{max}, m\rangle$.

   c) Use ortonormalidad para encontrar el estado $|j_{max} - 1, j_{max} - 1\rangle$.

   d) Use J_- para generar todos los estados $|j_{max} - 1, m\rangle$.

   e) ¿Cuál es el valor de expectación de L_z en el estado con $j = 1/2$ y $m = 1/2$? ¿Cuál es el valor de expectación de S_z en ese estado?

2. Se intenta sumar impulsos angulares $j_1 = 1$ y $j_2 = 1$ para formar estados con $j = 2, 1,$ y 0. Usando las relaciones de recurrencia,

$$\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\langle m_1, m_2|j, m \pm 1\rangle =$$
$$\sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)}\langle m_1 \mp 1, m_2|j, m\rangle + \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)}\langle m_1, m_2 \mp 1|j, m\rangle$$

   exprese todos los autoestados $\{|j, m\rangle\}$ (nueve) en términos de los $|m_1, m_2\rangle$. Escriba su respuesta en la forma
$$|j = 1, m = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0, 1\rangle\,, \ldots$$

3. Considere dos partículas con espín $1/2$. Calcule todos los coeficientes de Clebsh-Gordan por dos caminos diferentes:

   a) Escriba los kets correspondientes a los posibles estados de espín en la base de autoestados de S^2 y S_z total (triplete y singlete)
$$\{|s = 1, m = 1\rangle\,, \quad |s = 1, m = -1\rangle\,, \quad |s = 1, m = 0\rangle\}\,, \qquad \{|s = 0, m = 0\rangle\}\,,$$
   en función de los kets en la representación $\{m_1, m_2\}$, usando los operadores $S_\pm$ y ortogonalidad.

   b) Escriba la matriz de 4×4 que corresponde a la representación del operador
$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$$
   en la base $\{m1, m2\}$. Luego encuentre la matriz unitaria que diagonaliza esta matriz. ¿Puede identificar sus elementos?

4. Muestre que la función de onda de un estado con $j = 1$ formado mediante el acoplamiento de dos partículas con espín 0 provenientes de orbitales p, resulta antisimétrica en las coordenadas de las partículas.

5. Incluyendo el acoplamiento espín-órbita, el hamiltoniano electrónico para el átomo de hidrógeno sin campos externos es
$$H = H_0 + \frac{2\mu_B^2}{r^3}\frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}{\hbar^2}\,,$$
   donde $H_0 = p^2/2m - e^2/r$, y $\mathbf{S}$ representa el espín del electrón.

a) Evalúe los conmutadores

$$\left[H, L^2\right] \;, \left[H, S^2\right] \;, \left[H, J^2\right] \;, \left[H, L_z\right] \;, \left[H, S_z\right] \;, \left[H, J_z\right] \;,$$

donde $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. ¿Cuál es el conjunto más grande de estos operadores (incluyendo H) que conmutan mutuamente?

b) Ahora se enciende un campo magnético externo $\mathbf{B} = B\hat{z}$, de modo que se agrega al hamiltoniano el término

$$H_B = \frac{\mu_B}{\hbar} B \left(L_z + 2S_z\right) \;.$$

Para este caso, repita el punto (a).

6. Considere una partícula de espín $1/2$ y masa m, que está sometida a un potencial tipo oscilador armónico tridimensional isótropo

$$V(\mathbf{r}) = \frac{m\omega^2 r^2}{2} \;,$$

al que se le añade un potencial de interacción espín-órbita $\gamma \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$, donde $\mathbf{L}$ es el momento angular orbital y $\mathbf{S}$ el espín de la partícula. El hamiltoniano total está dado entonces por

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} + \gamma \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \;.$$

a) Halle exactamente las energías y autoestados de H correspondientes al nivel fundamental y al primer excitado. Ayuda: pruebe que los estados con $N = 1$ tienen $l = 1$. Una opción es probar que $L^2 = \hbar^2 N(N+1) - \hbar^2 a_i^\dagger a_i^\dagger a_j a_j$.

b) Si en $t = 0$ el sistema está en $|\varphi\rangle = |N = 1, L_z = \hbar, S_z = \hbar/2\rangle$, halle $|\varphi(t)\rangle$. Si en $t = 0$ se mide la energía, ¿qué resultado se obtiene? ¿Y si se mide L^2 o L_z? ¿Qué ocurre si las mediciones se realizan a $t > 0$?

c) Repita el ítem anterior para el estado a $t = 0$ dado por $|\psi\rangle = |N = 1, L_z = -\hbar, S_z = \hbar/2\rangle$

7. a) Evalúe

$$\sum_{m=-j}^{j} \left| d^{(j)}_{m,m'}(\beta) \right|^2 m \;,$$

para cualquier j (entero o semi-entero). Verifique su respuesta para $j = 1/2$.

b) Pruebe que para cualquier j

$$\sum_{m=-j}^{j} m^2 \left| d^{(j)}_{m,m'}(\beta) \right|^2 = \frac{1}{2} j(j+1) \sin^2\beta + m'^2 \frac{1}{2}(3\cos^2\beta - 1) \;.$$

8. Escriba $d^{(3/2)}$ a partir de $d^{(1)}$, $d^{(1/2)}$, y los coeficientes de Clebsh-Gordan.

9. **Versión simplificada de la *paradoja EPR***: Considere un sistema formado por dos partículas de espín $1/2$. Un observador A se especializa en medir las componentes de espín de una de las partículas (S_{1x}, S_{1y}, S_{1z}), mientras que el observador B mide las componentes de espín de la otra partícula. Suponga que se sabe que el sistema está en un estado singlete de espín, es decir que $S_{total} = 0$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el observador A obtenga $S_{1z} = \hbar/2$ cuando el observador B no efectúa mediciones? Repita el cálculo para $S_{1x} = \hbar/2$.

b) El observador B mide $S_{2z} = \hbar/2$. ¿Qué puede decir sobre el resultado de la medición posterior de A si: (i) A mide S_{1z}, (ii) A mide S_{1x}? Justifique su respuesta.

c) Compare las dos situaciones de los items anteriores. Note que el aparato de medición de A obtiene resultados correlacionaos con los de B solo si B mide en la misma dirección que A. Por esto, la elección de la dirección de medición de A y B influye en el grado de correlación de las mediciones, aún si A y B están separados años luz de distancia. Ver sección 3.9 del Sakurai.

10. Los tensores irreducibles de rango k transforman, por definición, según una rotación representada por momento angular k.

$$R(\hat{n},\phi)T_q^{(k)}R^{-1}(\hat{n},\phi) = \sum_{q'=-k}^{k} D_{q'q}^{(k)}(\hat{n},\phi)T_{q'}^{(k)},$$

donde $T_q^{(k)}$ es la descomposición del tensor en una *base esférica* con $q = -k, \ldots, k$. Esto es equivalente, en su forma infinitesimal, a

$$[J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)}, \quad [J_\pm, T_q^{(k)}] = \hbar\sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)}T_{q\pm 1}^{(k)}$$

Mostrar que $V_{\pm 1} = \mp\frac{1}{2}(x \pm iy)$ y $V_0 = z$ son una base esférica de tensores irreducibles de rango 1.

11. Demuestre que el producto de dos tensores irreducibles $T_q^{(k)}$ y $W_p^{(h)}$, de rango k y h respectivamente, no es un tensor irreducible sino una combinación lineal de ellos. Proceda del siguiente modo: demuestre, usando las propiedades de transformación ante rotaciones, que

$$Z_m^{(j)} = \sum_{q,p} T_q^{(k)} W_p^{(h)} \langle kh, qp|jm\rangle$$

es un tensor irreducible de rango j, luego invierta esta expresión utilizando la relación de completitud de los coeficientes de Clebsh-Gordan. Muestre que el producto de dos vectores $\mathbf{V}$ y $\mathbf{U}$ se puede escribir como la suma de un escalar, otro vector y un tensor esférico de rango 2. Escriba explícitamente las componentes del vector y el tensor esférico de rango 2 en términos de las componentes $U_{x,y,z}$ y $V_{x,y,z}$. En particular, si $\mathbf{V} = \mathbf{U} = \mathbf{R}$ es el operador posición, muestre que el tensor de rango 2 que se obtiene es, a menos de un factor, el operador momento cuadrupolar eléctrico.

12. *a*) Considere una partícula sin espín ligada a un centro fijo mediante un potencial central. Estudie los elementos de matriz

$$\left\langle n', l', m' \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy) \right| n, l, m \right\rangle \quad \text{y} \quad \langle n', l', m'|z|n, l, m\rangle \ ,$$

utilizando unicamente el teorema de Wigner-Eckart. Esté seguro de establecer correctamente qué elementos de matriz son no nulos.

b) Repita el punto (a) usando funciones de onda $\Phi(x) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\phi)$.

13. *a*) Escriba xy, xz, y $(x^2 - y^2)$ como combinaciones lineales de componentes de un tensor esférico (irreducible) de rango 2.

b) El valor de expectación

$$Q = e\left\langle \alpha, j, m = j \left| (3z^2 - r^2) \right| \alpha, j, m = j \right\rangle$$

es conocido como el momento cuadrupolar. Evalúe

$$e\left\langle \alpha, j, m' \left| (x^2 - y^2) \right| \alpha, j, m = j \right\rangle \ ,$$

(donde $m' = j, j-1, j-2, \ldots$) en función de Q y los coeficientes de Clebsch-Gordan apropiados.

14. El tensor cuadrupolar de un sistema se define como

$$Q_{ik} = e\left(3x_i x_k - \delta_{ik} r^2\right) \ .$$

Si el sistema está en un estado con un valor de impulso angular total j, el momento cuadrupolar definido en el ejercicio anterior corresponde al valor de expectación de Q_{zz} en el estado con $m = j$. Evalúe los valores de expectación restantes de Q_{ik} sobre los estados $|\alpha, j, m = j\rangle$. Interprete el resultado.

15. Probar que un núcleo atómico de espín 0 o $1/2$ tiene momento cuadrupolar eléctrico nulo (el espín de un núcleo es el momento angular resultante de los espines y momentos angulares relativos de los nucleones constituyentes).