

Física Teórica 2

Segundo cuatrimestre de 2015

Guía 7: Simetrías

1. Sea $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ el operador de traslación con vector desplazamiento \mathbf{d} , $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}, \phi)$ el operador de rotación ($\hat{\mathbf{n}}$ y ϕ son respectivamente el eje y el ángulo de rotación), y Π el operador de paridad. ¿Cuáles de los siguientes pares de operadores conmutan? ¿Por qué?

- (a) $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ y $\mathcal{T}_{\mathbf{d}'}$ (\mathbf{d} y \mathbf{d}' en distintas direcciones).
- (b) $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}, \phi)$ y $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}', \phi')$ ($\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{n}}'$ en distintas direcciones).
- (c) $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ y Π .
- (d) $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}, \phi)$ y Π .

2. Se sabe que un estado cuántico $|\Phi\rangle$ es simultáneamente autoestado de dos operadores hermíticos A y B que anticonmutan. ¿Qué puede decir sobre los correspondientes autovalores de A y B para este estado? Ilustre el resultado usando el operador paridad y el operador de momentos (utilice que $\Pi = \Pi^{-1} = \Pi^\dagger$).

3. Considere dos autoestados del operador paridad

$$\Pi |\alpha\rangle = \epsilon_\alpha |\alpha\rangle \quad \Pi |\beta\rangle = \epsilon_\beta |\beta\rangle ,$$

donde los autovalores ϵ_α y ϵ_β pueden ser 1 o -1 . Muestre que

$$\langle \beta | \mathbf{x} | \alpha \rangle = 0$$

salvo si $\epsilon_\alpha = -\epsilon_\beta$. Relacione este resultado con el argumento usual $\int \phi_\beta^* \mathbf{x} \phi_\alpha d^3\mathbf{x} = 0$ si ϕ_α y ϕ_β tienen la misma paridad. ¿Qué ocurre con $\langle \beta | \mathbf{p} | \alpha \rangle$? ¿Y con $\langle \beta | \mathbf{S} \cdot \mathbf{x} | \alpha \rangle$?

4. Considere la función de onda estacionaria de una partícula sin espín

$$|\alpha lm\rangle = R_\alpha(r) Y_l^m(\theta, \phi) .$$

¿Qué puede decir del $V(\mathbf{r})$ en que se encuentra la partícula? Usando las expresiones de los armónicos esféricos, muestre que frente a la transformación de paridad $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$, el estado se transforma como

$$\Pi |\alpha lm\rangle = (-1)^l |\alpha lm\rangle .$$

¿Qué puede decir de las propiedades de conmutación de Π y \mathbf{L} ?

5. Una partícula de espín $1/2$ está ligada a un centro fijo por un potencial esféricamente simétrico. Considere las funciones espín-angulares,

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_l^{j=l\pm 1/2, m} &= \pm \sqrt{\frac{l \pm m + 1/2}{2l + 1}} Y_l^{m-1/2}(\theta, \phi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{l \mp m + 1/2}{2l + 1}} Y_l^{m+1/2}(\theta, \phi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2l + 1}} \begin{pmatrix} \pm \sqrt{l \pm m + 1/2} Y_l^{m-1/2}(\theta, \phi) \\ \sqrt{l \mp m + 1/2} Y_l^{m+1/2}(\theta, \phi) \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

que son autofunciones de L^2 , S^2 , J^2 , y J_z simultáneamente.

- (a) Escriba la función espín-angular $\mathcal{Y}_{l=0}^{j=1/2, m=1/2}$.

(b) Expresé $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x}) \mathcal{Y}_{l=0}^{j=1/2, m=1/2}$ en términos de $\mathcal{Y}_l^{j, m}$.

(c) Muestre que el resultado obtenido en (b) se puede interpretar usando las propiedades de transformación de $\mathbf{S} \cdot \mathbf{x}$ ante rotaciones e inversión espacial (paridad).

6. Debido a interacciones débiles existentes entre los electrones atómicos y el núcleo, se puede tomar un potencial que viola paridad de la siguiente forma:

$$V = \lambda[\delta^3(\mathbf{x})\mathbf{S} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}\delta^3(\mathbf{x})],$$

donde \mathbf{S} y \mathbf{p} son los operadores de espín y de momento del electrón respectivamente, y se supone que el núcleo está ubicado en el origen de coordenadas. Como resultado, el estado fundamental de un átomo alcalino, usualmente caracterizado por $|n, l, j, m\rangle$, en realidad contiene pequeñas contribuciones provenientes de otros autoestados en la siguiente manera:

$$|n, l, j, m\rangle \rightarrow |n, l, j, m\rangle + \sum_{n' l' j' m'} C_{n' l' j' m'} |n', l', j', m'\rangle.$$

Usando solamente consideraciones de simetría, ¿qué puede decir acerca de los (n', l', j', m') que dan contribuciones no nulas? Suponga que las funciones de onda radiales y los niveles de energía son conocidos. Indique como calcularía los $C_{n' l' j' m'}$. ¿Se obtienen más restricciones acerca de los (n', l', j', m') ?

7. Sea una partícula sometida a un potencial de oscilador armónico cuyo estado inicial a $t = 0$ es el estado coherente

$$|\beta\rangle = e^{-|\beta|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle,$$

donde $\beta \in \mathbb{C}$.

(a) Se mide el operador paridad Π a $t = 0$ obteniéndose el autovalor $+1$. ¿Cuál es el estado $|\psi\rangle$ del sistema a tiempo $t > 0$?

(b) ¿Qué valores puede tomar a $t > 0$ el operador H y con qué probabilidad? ¿Cuál es el estado a un tiempo posterior? ¿Cuál es el primer estado excitado? ¿Qué resultados posibles daría la medición de Π ?

8. Evalúe los siguientes elementos de matriz. Si alguno se anula, explique por qué usando argumentos de simetría.

(a) $\langle n = 2, l = 1, m = 0 | x | n = 2, l = 0, m = 0 \rangle$.

(b) $\langle n = 2, l = 1, m = 0 | p_z | n = 2, l = 0, m = 0 \rangle$.

(c) $\langle L_z \rangle$ para un electrón en un campo central con $j = 9/2$, $m = 7/2$, y $l = 4$.

En (a) y (b), $|nlm\rangle$ son los autoestados de energía del átomo de hidrógeno ignorando los efectos de espín.