Física Teórica 2

Segundo cuatrimestre de 2015
Guía 10: Matriz densidad y sistemas compuestos

1. Sobre un sistema se mide cierta magnitud A. El valor medio de los resultados de la medición $\langle A \rangle$ tiene una probabilidad p_n de ser igual a $\langle A \rangle_n$, donde
$$\langle A \rangle_n = \langle n|A|n \rangle \ ,$$
y donde $\{|n\rangle\}$ es una base ortonormal. La mezcla estadística de los estados dinámicos representados por los kets $|n\rangle$ se puede describir mediante el operador densidad
$$\rho = \sum_n |n\rangle \, p_n \, \langle n| \ .$$
donde $\sum_n p_n = 1$, y $p_n \geq 0$ para todo n.

    a) Demuestre que el valor medio del observable A es la traza de ρA, es decir
    $$\langle A \rangle = \mathrm{Tr}(\rho A) \ .$$
    Generalize el resultado para cualquier $\mathrm{F}(A)$.

    b) Demuestre que ρ es hermítico.

    c) Demuestre la condición de normalización $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$.

2. Considere la matriz densidad ρ de un espacio de estados de dimensión 2, cuyos elementos están dados por
$$\rho_{ij} = \frac{1}{2} \qquad \text{para todo } i, j \in \{1, 2\}$$
y sea $\{|\psi_i\rangle\}$ la base elegida para representar al estado.

    a) Determinar si el estado representado por ρ es un estado mixto o un estado puro.

    b) Escribir los vectores $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ en términos de aquéllos vectores que conforman la base en la cual la matriz densidad es diagonal.

    c) ¿Es siempre posible diagonalizar la matriz densidad? Justifique su respuesta.

3. Para los siguientes sistemas de espín 1/2, escriba el operador densidad, y la matriz densidad en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

    a) Un haz completamente polarizado con S_z+.

    b) Un haz completamente porarizado con S_x+.

    c) Un haz no polarizado, formado por una mezcla incoherente de S_x+ y S_x- en igual cantidad (50 %).

    d) Un haz parcialmente polarizado, formado por una mezcla incoherente con 75 % de S_z+ y 25 % de S_x+.

    Para los casos (c) y (d), calcule los valores medios estadísticos $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$ y $\langle S_z \rangle$.

4. Considere dos conjuntos estadísticos de sistemas de espín $1/2$ A y B. El primero se encuentra en un estado puro $|\psi_A\rangle = |S_z, +\rangle$, y el segundo en el estado puro $|\psi_B\rangle = |S_x, +\rangle$. Se realiza una medición de S_x sobre el sistema A y otra de S_z sobre el sistema B, pero en ninguno de los dos casos se observa el resultado.

a) Escriba explicitamente ρ_A y ρ_B luego de las mediciones, en representación $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ y verifique que describen estados mezcla.

b) ¿Cómo se relacionan ρ_A y ρ_B?

5. *a*) Pruebe que la evolución temporal del operador densidad ρ en el esquema de Schrödinger está dada por

$$\rho(t) = U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0) \ ,$$

donde $U(t, t_0)$ es el operador de evolución temporal.

b) A partir de la ecuación de Schrödinger para el operador $U(t, t_0)$, encuentre la ecuación de Schrödinger para el operador densidad. ¿Cuál es la diferencia fundamental con la correspondiente ecuación de Heisenberg?

c) Suponga que a $t = 0$ tiene un estado puro. Muestre que el estado no puede evolucionar a uno mixto si la evolución temporal está descripta por la ecuación de Schrödinger. Muestre que esta imposibilidad resulta solo del hecho de tener una evolución unitaria. Nota: este es un ingrediente esencial en la paradoja de pérdida de información en agujeros negros formulada por Stephen Hawking, donde un estado puro parecería evolucionar a uno mixto (apareciendo así la radiación de Hawking) a medida que el agujero negro se avapora (porque irradia).