Primer parcial de Física Teórica 2 - 2do cuatrimestre 2015

Importante: es condición necesaria para la aprobación que **todos los pasos estén claramente justificados**. Si considera que hay alguna expresión que necesita y no tiene como deducirla rapidamente levante la mano y solicítela. Resuelva cada ejercicio en hojas separadas. Se aprueba con 6/10.

1. (*3.5 puntos*) Considerar un sistema de tres estados independientes, con base ortonormal $\{|u_i\rangle, i = 1, 2, 3\}$. En esta base el hamiltoniano H y los observables A, B están representados por las siguientes matrices

$$H = E_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}, \quad B = b \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3i \\ -3 & 0 & 2i \\ -3i & -2i & 0 \end{pmatrix}$$

a) Decidir si estos conmutadores son cero o no: $[H, A], [H, B], [A, B]$. Encuentre un CCOC lo más chico posible.

b) Encontrar una base ortonormal $\{|w_i\rangle, i = 1, 2, 3\}$ en la cual A y H sean diagonales simultaneamente. Expresar los observables H, A, B en la nueva base.

c) Si el sistema se encuentra en el estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{i}{2}|u_3\rangle$$

qué valores de la energía pueden obtenerse y con qué probabilidades? Hallar el valor de expectación del hamiltoniano en dicho estado.

d) Hallar $|\psi(t)\rangle$ y encontrar las probabilidades de medir cada autovalor de A y de B en función del tiempo. Hallar $< A >$ y $< B >$ para todo tiempo.

e) Si al medir la energía en el punto 1*c* se obtiene $E = 2E_0$, qué resultados se pueden obtener y con qué probabilidades en una medida posterior de B?

2. (*3.5 puntos*) Considere un oscilador armónico en una dimensión,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \tag{1}$$

a) Decida si hay estados coherentes $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ ortogonales, es decir, para los cuales se tenga que $S(\alpha, \beta) \equiv \langle\beta|\alpha\rangle = 0$.

b) Considere un estado inicial del sistema dado por $|\psi(0)\rangle = c\,(|\alpha\rangle + |\alpha^*\rangle)$, con $\alpha = e^{i\frac{\theta}{2}}$ y $\theta \in [0, \pi]$.

i) Calcule los valores medios $\langle x\rangle$ y $\langle p\rangle$ para todo instante, en función de c, θ, $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$ y $p_0 = \frac{\hbar}{2x_0}$. Determine los valores θ_{max} y θ_{min} que maximizan y minimizan, respectivamente, $|S(\alpha, \alpha^*)|$. Evalúe $\langle x\rangle$ y $\langle p\rangle$ para dichos valores de θ e interprete todos los resultados obtenidos de manera gráfica en el espacio de fases $x - p$.

ii) Si $\theta = \frac{\theta_{max}+\theta_{min}}{2}$, calcular c para que el estado esté normalizado. Determinar el estado evolucionado del sistema $|\psi(t)\rangle$. Si en el instante t se mide la energía, calcule las probabilidades de que el valor obtenido sea $\frac{3\hbar\omega}{2}$ y de que sea $\frac{5\hbar\omega}{2}$.

3. (*3 puntos*) Considere un sistema dinámico en tres dimensiones descripto por un hamiltoniano con un potencial central. Llamemos $|n\,\ell\,m\rangle$ a los estados estacionarios, donde ℓ y m son los usuales números cuánticos asociados a la parte angular de las funciones de onda.

   a) Si se quiere calcular el tensor dipolar se necesitan los elementos de matriz de los operadores x, y, z. Nos interesan los elementos de matriz entre estados con $l = 3$ y $l = 1$ (asuma n y n' dados).
   i) ¿Cuántos elementos de matriz hay que calcular?
   ii) Encuentre todos los elementos de matriz.

   b) Si se quiere calcular las componentes del tensor cuadrupolar se necesitan los elementos de matriz de los operadores $r_i r_j$, con $r_i = x, y, z$. Nuevamente nos interesan los elementos de matriz entre estados con $l = 3$ y $l = 1$ (asuma n y n' dados, nuevamente).
   i) ¿Cuántos elementos de matriz hay que calcular ahora <u>en total</u>?
   ii) Encuentre aquellos que son cero
   iii) Exprese todos los elementos de matriz no nulos $\langle n'\,3\,m'|r_i r_j|n\,1\,m\rangle$ como multiplicación de $\langle n'\,3\,0|z^2|n\,1\,0\rangle$ por un coeficiente de Clebsch-Gordan (si aparece un coeficiente dividiendo entonces debe ser calculado explícitamente). No se preocupe por constantes de normalización de los operadores.

Algunas expresiones que podrían resultar útiles

1. Estado coherente
$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle\,.$$

2. La base esférica de tensores irreducibles $T^{(k)}$ se define como la que satisface:
$$[L_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)}, \quad [L_\pm, T_q^{(k)}] = \hbar\sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)}T_{q\pm1}^{(k)}$$

3. Tensor irreducible como sumas de productos de tensores irreducibles:
$$T_q^{(k)} = \sum_{q_1 q_2} \langle q_1 q_2|kq\rangle X_{q_1}^{(k_1)} Z_{q_2}^{(k_2)}$$

4. Si U_i y V_j son *componentes cartesianas* de tensores de rango 1, entonces su producto se descompone en una parte de rango 0, otra de rango 1 (antisimétrica) y otra de rango 2 simétrica y sin traza:
$$U_i V_j = \frac{U\cdot V}{3}\delta_{ij} + \frac{U_i V_j - U_j V_i}{2} + \left(\frac{U_i V_j + U_j V_i}{2} - \frac{U\cdot V}{3}\delta_{ij}\right)$$

5. Teorema de Wigner-Eckart:
$$\langle n'\,\ell'\,m'|T_q^{(k)}|n\,\ell\,m\rangle = \langle k\,\ell; q\,m|k\,\ell; \ell'\,m'\rangle\langle n'\,\ell'||T^{(k)}||n\,\ell\rangle$$