Primer recuperatorio de Física Teórica 2 - 2do cuatrimestre 2015

**Importante:** es condición necesaria para la aprobación que **todos los pasos estén claramente justificados**. Si considera que hay alguna expresión que necesita y no tiene como deducirla rapidamente levante la mano y solicítela. Resuelva cada ejercicio en hojas separadas. Se aprueba con 6/10.

1. Considere un Hamiltoniano que, en alguna base, está representado por la matriz $H$, y un observable $A$ que representamos matricialmente en la misma base:

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

   *a*) Si se realiza un experimento para medir $A$, ¿qué resultados se pueden obtener? ¿Si se conoce el valor de $A$ medido, es posible determinar con precisión cuál es el estado del sistema después de la medición, sin importar cuál era el estado antes? ¿Por qué? Escriba explícitamente la base de autoestados de $A$. Si el estado del sistema, escrito en la misma base que las matrices, está dado por:
   $$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, 0, 1)^t$$
   ¿Qué valores de A se pueden medir y con qué probabilidad?

   *b*) Calcule la probabilidad de medir $A = 0$ en función del tiempo para el estado anterior $|\phi\rangle$.

   *c*) Suponga que el sistema está dado por $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{2}(|a\rangle + |-a\rangle)$, y se mide la energía del sistema: ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidad? Escriba el estado del sistema después de la medición para cada caso. (Hemos llamado $|q\rangle$ a los autoestados de $A$ con autovalor $q$; esto es $A|a\rangle = a|a\rangle$, $A|-a\rangle = -a|-a\rangle$ y $A|0\rangle = 0$.)

2. Considere una partícula de masa $m$ y carga $e$ que se encuentra bajo la acción de un potencial armónico tridimensional y un campo eléctrico $E = E_0\hat{z}$. Bajo estas consideraciones, el Hamiltoniano de la partícula es:
   $$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}r^2 - eE_0 z$$

   *a*) Obtenga las autoenergías asociadas a $H$ y muestre de qué manera el campo eléctrico modifica las energías del oscilador armónico. Ayuda: Reescriba $H$ haciendo el cambio apropiado del operador $z$ y vea que las relaciones de conmutación usuales de $[x, p]$ se mantienen

   *b*) Mueste que $|0\rangle_z$ es un estado coherente respecto de los osciladores asociados al nuevo operador introducido en el punto anterior.

   *c*) Suponga un estado inicial del tipo:
   $$|\psi_0\rangle = \frac{(|0\rangle_x + |2\rangle_x)}{\sqrt{2}}|0\rangle_y|0\rangle_z$$
   Halle la evolución temporal del estado y encuentre el tiempo más corto $\tau$ en el que el sistema se encuentra en un estado ortogonal al inicial. Ayuda: tenga en cuenta los estados coherentes del oscilador armónico y sus propiedades.

   *d*) Calcule $< \Delta x^2 >$, en función del tiempo a partir de la representación de Heinsenberg.

3. (*3 puntos*) Considere un sistema dinámico en tres dimensiones descripto por un hamiltoniano con un potencial central. Llamemos $|n\,\ell\,m\rangle$ a los estados estacionarios, donde $\ell$ y $m$ son los usuales números cuánticos asociados a la parte angular de las funciones de onda.

   *a*) Si se quiere calcular el tensor dipolar se necesitan los elementos de matriz de los operadores $x, y, z$. Nos interesan los elementos de matriz entre estados con $l = 3$ y $l = 1$ (asuma $n$ y $n'$ dados).
   i) ¿Cuántos elementos de matriz hay que calcular?
   ii) Encuentre todos los elementos de matriz.

   *b*) Si se quiere calcular las componentes del tensor cuadrupolar se necesitan los elementos de matriz de los operadores $r_i r_j$, con $r_i = x, y, z$. Nuevamente nos interesan los elementos de matriz entre estados con $l = 3$ y $l = 1$ (asuma $n$ y $n'$ dados, nuevamente).
   i) ¿Cuántos elementos de matriz hay que calcular ahora en total?
   ii) Encuentre aquellos que son cero
   iii) Exprese todos los elementos de matriz no nulos $\langle n'\,3\,m'|xz|n\,1\,m\rangle$ como multiplicación de $\langle n'\,3\,0|z^2|n\,1\,0\rangle$ por un coeficiente de Clebsch-Gordan (si aparece un coeficiente dividiendo entonces debe ser calculado explícitamente). No se preocupe por constantes de normalización de los operadores.

## Algunas expresiones que podrían resultar útiles

1. Estado coherente
$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle\,.$$

2. La base esférica en función de la coordenada, para rango 1
$$V_{\pm 1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm V_x + iV_y), \quad V_0 = V_z$$

3. La base esférica de tensores irreducibles $T^{(k)}$ se define como la que satisface:
$$[L_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)}, \quad [L_\pm, T_q^{(k)}] = \hbar\sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)}T_{q\pm 1}^{(k)}$$

4. Tensor irreducible como sumas de productos de tensores irreducibles:
$$T_q^{(k)} = \sum_{q_1 q_2} \langle q_1 q_2|kq\rangle X_{q_1}^{(k_1)} Z_{q_2}^{(k_2)}$$

5. Si $U_i$ y $V_j$ son *componentes cartesianas* de tensores de rango 1, entonces su producto se descompone en una parte de rango 0, otra de rango 1 (antisimétrica) y otra de rango 2 simétrica y sin traza:
$$U_i V_j = \frac{U\cdot V}{3}\delta_{ij} + \frac{U_i V_j - U_j V_i}{2} + \left(\frac{U_i V_j + U_j V_i}{2} - \frac{U\cdot V}{3}\delta_{ij}\right)$$

6. Teorema de Wigner-Eckart:
$$\langle n'\,\ell'\,m'|T_q^{(k)}|n\,\ell\,m\rangle = \langle k\,\ell; q\,m|k\,\ell;\ell'\,m'\rangle\langle n'\,\ell'||T^{(k)}||n\,\ell\rangle$$