Segundo recuperatorio de Física Teórica 2 - 2do cuatrimestre 2015

Importante: es condición necesaria para la aprobación que **todos los pasos estén claramente justificados**. Si considera que hay alguna expresión que necesita y no tiene como deducirla rapidamente levante la mano y solicítela. Resuelva cada ejercicio en hojas separadas. Se aprueba con 6/10.

1. (*3 puntos*) La matriz hamiltoniana de un sistema de dos niveles puede escribirse como

$$H = \begin{pmatrix} E_1^0 & \lambda\Delta \\ \lambda\Delta & E_2^0 \end{pmatrix}.$$

Asuma $E_1^0 \geq E_2^0$. Claramente los autovectores de la energía del problema no perturbado $(\lambda = 0)$ son

$$\phi_1 = (1,0)^t, \quad \phi_2 = (0,1)^t$$

El parámetro Δ es real y tiene unidades de energía, mientras que λ es una constante real adimensional que al variarla nos va a permitir probar distintas situaciones.

a) Resuelva este problema exactamente, encuentre los autovectores y autovalores de la energía.

b) Asumiendo que $\lambda|\Delta| << E_1^0 - E_2^0$, resuelva el mismo problema usando la teoría de perturbaciones. Halle la corrección de primer orden en los autovectores y de segundo orden en los niveles de energía. Compare los resultados con los obtenidos en (a).

c) Suponga ahora que los niveles de energía no perturbados están casi degenerados: $E_1^0 - E_2^0 << \lambda|\Delta|$. Muestre que los resultados exactos obtenidos en (a) de autoenergías y autoestados coniciden al orden más bajo con las energías y autoestados que obtendría al aplicar la teoría de perturbaciones para el caso degenerado $E_1^0 = E_2^0$ a primer orden.

2. (*4 puntos*) Considere un átomo de hidrógeno con autoestados $|n,l,m_l,1/2,m_s\rangle = |n,l,m\rangle \otimes |m_s\rangle$ y asuma conocidas sus energías. En $t=0$ se encuentra en el estado

$$|i\rangle = c_1|4,3,1\rangle \otimes |-\rangle + c_2|3,2,0\rangle \otimes |+\rangle$$

y comienza a ser sometido a una perturbación que depende armónicamente del tiempo, dada por un potencial de interacción

$$V(t) = V_0(Y_1^1 + Y_{-1}^1) \otimes\, S_x \cos(\omega t)\ .$$

a) Calcule la probabilidad de obtener los siguientes estados finales luego de un tiempo τ a primer orden en la teoría de perturbaciones (deje expresado el resultado en términos de elementos de matriz que no pueda calcular). Ayuda: tenga en cuenta argumentos de simetría.

1) $|f\rangle = |4,1,-1\rangle \otimes (\alpha|+\rangle + \beta|-\rangle)$
2) $|f\rangle = |4,0,0\rangle \otimes (\alpha|+\rangle + \beta|-\rangle)$
3) $|f\rangle = |4,2,-1\rangle \otimes (\alpha|+\rangle + \beta|-\rangle)$.

Donde α y β son constantes conocidas.

b) Suponga la transición primera del ítem anterior. Calcule nuevamente para el caso de resonancia, donde $\hbar\omega$ coincide con la diferencia de energía $E_f - E_i$. Explique si la teoría a primer orden deja de valer en este caso.

3. (*3 puntos*) Considere un átomo de dos electrones, ambos en la órbita $2p$. Tenga en cuenta que los electrones son fermiones de espín $1/2$ y desprecie la interacción entre electrones.

   a) Indique qué valores se pueden obtener del J^2 total (suma de todos los posibles momentos angulares). ¿Cuántas configuraciones distintas con $j = 1$ hay?

   b) Para el caso de un electrón en el estado $|2p, m_1 = 1, +\rangle$ y el otro en el estado $|2p, m_2 = 0, -\rangle$, escriba la función de onda con la simetría adecuada. ¿Qué valores de L^2, S^2 y J^2 se pueden medir y con qué probabilidad? (o sea, decir qué l, s, j se puede obtener)

   c) Se tiene **estadísticamente** $1/3$ de probabilidad de tener el estado con $S = 0$ y $m_1 + m_2 = 2$ y $2/3$ de probabilidad de tener el estado con $S = 0$ y $m_1 + m_2 = -2$. i) Escriba el operador densidad correspondiente y ii) calcule el valor medio del observable J_z.

Algunas expresiones que podrían resultar útiles

1. Perturbaciones:
$$\dot{c}_m^{(1)}(t) = \frac{-i}{\hbar} \sum_n c_n^{(0)} e^{-i(E_n - E_m)t/\hbar} \langle m|V(t)|n\rangle$$

2. Teorema de Wigner-Eckart:
$$\langle n'\, \ell'\, m'|T_q^{(k)}|n\, \ell\, m\rangle = \langle k\, \ell; q\, m|k\, \ell; \ell'\, m'\rangle \langle n'\, \ell'||T^{(k)}||n\, \ell\rangle$$