Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2016
Guía 1: Sistemas de dimensión 2

1. El estado de polarización de un fotón se puede describir por un vector en un espacio vectorial complejo de dimensión 2. En el se pueden definir las bases $\{|x\rangle, |y\rangle\}$, $\{|x'\rangle, |y'\rangle\}$ y $\{|R\rangle, |L\rangle\}$, correspondientes a polarización lineal en x y y, polarización lineal en x' y y' y polarización circular. Los productos de dichas bases estan en la siguiente tabla (por ejemplo $\langle y|R\rangle = i/\sqrt{2}$):

	$\|x\rangle$	$\|y\rangle$	$\|x'\rangle$	$\|y'\rangle$	$\|R\rangle$	$\|L\rangle$
$\langle x\|$	1	0	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\langle y\|$		1	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$i/\sqrt{2}$	$-i/\sqrt{2}$
$\langle x'\|$			1	0	$e^{i\theta}/\sqrt{2}$	$e^{-i\theta}/\sqrt{2}$
$\langle y'\|$				1	$ie^{i\theta}/\sqrt{2}$	$-ie^{-i\theta}/\sqrt{2}$
$\langle R\|$					1	0
$\langle L\|$						1

   (a) Muestre que el estado $|\psi\rangle = \frac{(1+i)}{2}|R\rangle + \frac{(1-i)}{2}|L\rangle$ tiene polarización lineal de las siguientes maneras:
      i. Multiplique por $\langle x'|$ y encuentre para que valor de θ, $\langle x'|\psi\rangle = 1$
      ii. Utilizando la matriz cambio de base, escriba $|\psi\rangle$ en la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$.

   (b) A partir de la relación de completitud de la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$, verifique la de $\{|x'\rangle, |y'\rangle\}$ y $\{|R\rangle, |L\rangle\}$.

   (c) Definimos el operador rotación mediante: $|x'\rangle = \hat{R}(\theta)|x\rangle$, $|y'\rangle = \hat{R}(\theta)|y\rangle$.
      i. Escriba la representación matricial de $\{|x'\rangle, |y'\rangle\}$, $\{|R\rangle, |L\rangle\}$, y $\hat{R}(\theta)$ en la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$.
      ii. Encuentre los autoestados y autovalores de $\hat{R}(\theta)$ y escriba su descomposición espectral.
      iii. Aplicando $\hat{R}(\pi/2)$ en su forma de descomposición espectral sobre $|x'\rangle$ muestre que obtiene $|y'\rangle$

2. Para un estado arbitrario $|\psi\rangle$ diga cuales de las siguientes propiedades son ciertas siempre, a veces o nunca. Ademas, diga cuales dependen de como se elige el factor arbitrario de fase.

   (a) $|\langle x|\psi\rangle|^2 + |\langle y|\psi\rangle|^2 = 1$.
   (b) $\langle x|\psi\rangle$ es real.
   (c) $\langle x|\psi\rangle$ y $\langle x'|\psi\rangle$ son reales.
   (d) $\langle x|\psi\rangle$ y $\langle R|\psi\rangle$ son reales.
   (e) Existe un $|\phi\rangle$ tal que $\langle\phi|\psi\rangle = 0$.
   (f) $|\langle x|\psi\rangle|^2 + |\langle R|\psi\rangle|^2 = 1$.
   (g) Si $|\langle x|\psi\rangle|^2 = |\langle\psi|\psi\rangle|^2$, entonces $|\langle x'|\psi\rangle|^2 = 1/2$ para todo θ.

   Interprete los que pueda en término de los experimentos de polarización y cristales birrefringentes.

3. Sea x' un eje orientado en $\theta = 30^0$ respecto a x, y un haz de fotones orientados en un estado de polarización lineal ψ tal que $|\langle y|\psi\rangle| = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

(a) Se hace pasar el haz por los siguientes 3 proyectores:

$$\mathrm{Detector} \quad \leftarrow y' \quad \leftarrow R \quad \leftarrow y \quad \leftarrow \psi$$

Calcular la probabilidad de transmisión.

(b) Repetir el cálculo si se invierten las direcciones:

$$\mathrm{Detector} \quad \leftarrow y \quad \leftarrow R \quad \leftarrow y' \quad \leftarrow \psi$$

(c) Repetir los cálculos si se reemplazan los polarizadores R por polarizadores L.

4. Sea un haz con N fotones por segundo descriptos por el siguiente estado de polarización:

$$|\psi\rangle = c(3\,|x\rangle + 4i\,|y\rangle)$$

(a) ¿Qué fracción de los fotones pasarán en promedio por un polarizador y?

(b) ¿Qué fracción de los fotones pasarán en promedio por un polarizador x' (orientado en un ángulo θ respecto a x)?

(c) Cuando un fotón está polarizado en R lleva un momento angular $\hbar$ respecto de su dirección de movimiento. Si su polarización es L posee el mismo momento angular, pero orientado en la dirección opuesta. Si el haz descripto por el estado ψ es absorbido totalmente por una superficie, ¿qué torque se ejercerá sobre la misma?

(d) ¿Qué se observa cuando se envía un solo fotón y éste es absorbido por la superficie (suponiendo que tiene un instrumento suficientemente delicado para medirlo)?

5. En un espacio vectorial de dimension 2 considere los operadores $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, que en la base ortonormal $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ con

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

se representan mediante las matrices

$$\sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Estas tres matrices se conocen como *matrices de Pauli*.

(a) ¿Son hermíticas estas matrices? Halle sus autovalores y autovectores en esta base.

(b) Verifique que se satisfacen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} det(\sigma_k) &= -1 \\ Tr(\sigma_k) &= 0 \\ \sigma_i^2 &= I \\ \sigma_j \sigma_k &= i\epsilon_{jkl}\sigma_l + I\delta_{jk}\ , \end{aligned}$$

donde I representa a la matriz identidad, $k = 1, 2, 3$ ($\equiv x, y, z$), ϵ_{ijk} es la densidad tensorial de Levi-Civita, y δ_{ij} es la delta de Kronecker.

6. Suponga una matriz de 2×2 X que se escribe en la forma

$$X = a_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}$$

donde a_0 y $a_{1,2,3}$ son números, y $\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$.

(a) ¿Cómo se relacionan los a_k ($k = 0, 1, 2, 3$) con $\mathrm{Tr}(X)$ y Tr $(\sigma_k X)$?

(b) Obtenga a_0 y a_k en término de los elementos de matriz X_{ij}. Muestre que cualquier matriz hermítica de 2×2 X se puede escribir en esta forma.

7. El operador impulso angular en dirección z es

$$L_z \;=\; \hbar \Big(|R\rangle \langle R| \,-\, |L\rangle \langle L| \Big)$$

(a) Encuentre sus autovalores y autovectores, y muestre su representación matricial en la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ es $\hbar\sigma_y$.

(b) Muestre usando la representación espectral que $\hat{R}(\theta) = \exp(\frac{-i\theta L_z}{\hbar})$.

(c) Muestre usando la representación en la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ que $\hat{R}(\theta) = I\cos\theta - i\frac{L_z}{\hbar}\sin\theta$. *Ayuda.* Use que $\sigma_y^2 = I$ (Ej. 5.b).

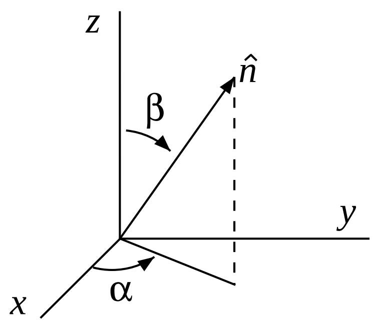
(d) Muestre que $\hat{L}_z$ es hermítico y $\hat{R}(\theta)$ unitario (use la representación matricial y la descomposición espectral).

8. Los estados $|+\rangle$ y $|-\rangle$ son autoestados de la componente z del espín S_z con autovalor $\pm\hbar/2$. Diga cómo actúan los operadores S_x y S_y sobre estos dos estados. Muestre que en esa base los operadores de espín se relacionan con las matrices de Pauli por: $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$. Verifique que $[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar S_k$ y $\{S_i, S_j\} = (\hbar^2/2)\delta_{ij}$.

9. Construya $|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle$ tal que

$$\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}\;|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle = \frac{\hbar}{2}\;|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ está caracterizado por los ángulos que se muestran en la figura. Exprese su respuesta como una combinación lineal de $|+\rangle$ y $|-\rangle$.



[Nota: la respuesta es

$$\cos(\beta/2)\,|+\rangle + e^{i\alpha}\sin(\beta/2)\,|-\rangle\ .$$

En lugar de verificar que esta respuesta satisface la ecuación de autovalores de arriba, considere al problema como un problema de autovalores.]

10. Un sistema de dos niveles está caracterizado por el hamiltoniano

$$H = H_{11}\,|1\rangle\langle 1| + H_{22}\,|2\rangle\langle 2| + H_{12}\,(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

donde H_{11}, H_{22}, H_{12} son números reales con dimensiones de energía y $|1\rangle$ y $|2\rangle$ son autoestados de algún observable(distinto de H). Encuentre los autoestados de energía y los correspondientes autovalores. Asegurese de que su respuesta tenga sentido en el caso $H_{12} = 0$ (no necesita resolver el problema desde cero; use el resultado del ejercicio anterior).

11. Un sistema de espín $1/2$ está en un autoestado de $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ con autovalor $\hbar/2$, donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario en el plano xz que forma un ángulo γ con el eje positivo z.

    (a) Suponga que se mide S_x. ¿Cuál es la probabilidad de obtener $\hbar/2$?

    (b) Evalúe la dispersión de S_x, es decir $\langle (S_x - \langle S_x \rangle)^2 \rangle$. Verifique el resultado para los casos $\gamma = 0, \pi/2, \pi$.

12. Un haz de átomos de espín $1/2$ es sometido a una serie de mediciones del tipo Stern-Gerlach en la siguiente manera:

    (a) La primera medición acepta átomos con $s_z = \hbar/2$ y rechaza átomos con $s_z = -\hbar/2$.

    (b) La segunda medición acepta átomos con $s_n = \hbar/2$ y rechaza con $s_n = -\hbar/2$, donde s_n es el autovalor del operador $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ con $\hat{\mathbf{n}}$ en el plano xz y formando un ángulo β con el eje z.

    (c) Una tercera medición acepta $s_z = -\hbar/2$ y rechaza $s_z = \hbar/2$.

    ¿Cuál es la intensidad del haz final $s_z = -\hbar/2$ si el haz $s_z = \hbar/2$ que pasa la primer medición esta normalizado a uno? ¿ Cómo se debe orientar el segundo aparato de medición para maximizar la intensidad del haz final $s_z = -\hbar/2$?

13. Dada la matriz
$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

    (a) Pruebe que J es unitaria y halle J^{-1}.

    (b) Aplique la transformación $B = JAJ^{-1}$ a una matriz simétrica y verifique que: (i) B es simétrica, (ii) $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

    (c) Dada una matriz A simétrica, halle θ de modo que B resulte ser diagonal.