Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2016

Guía 2: Formalismo: estados cuánticos, operadores, espectros discretos y contínuos

Parte I: Espacios de dimensión finita. El caso discreto.

1. Suponga que $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ y $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle\}$ son dos bases ortogonales.
   (a) Considere $|u\rangle = |\alpha\rangle - i|\beta\rangle$ y $|v\rangle = i|\alpha\rangle + |\beta\rangle$. ¿Cuánto vale $\langle u|v\rangle$? ¿Son ortogonales?
   (b) Sea $|k\rangle = \sum_{i=1}^{3} a_{ki}|i\rangle$, con $k = \alpha, \beta, \gamma$. ¿Cuánto valen $\langle 2|\beta\rangle$ y $\langle \alpha|3\rangle$?
   (c) Escriba $|u\rangle$ y $|v\rangle$ en la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ y calcule nuevamente $\langle u|v\rangle$.

2. Usando las reglas del álgebra de bra-ket, pruebe o evalúe los siguientes items:
   (a) $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$ y $\mathrm{Tr}(XYZ) = \mathrm{Tr}(ZXY)$, donde X,Y y Z son operadores.
   (b) $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$.
   (c) Calcule $g(A)$ en forma de ket-bra, donde A es un operador hermítico cuyos autovalores son conocidos.

3. (a) Considere dos kets $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$. Suponga que $\langle a_1|\alpha\rangle, \langle a_2|\alpha\rangle, \ldots$ y $\langle a_1|\beta\rangle, \langle a_2|\beta\rangle, \ldots$ son todos conocidos, donde $|a_1\rangle, |a_2\rangle, \ldots$ forman un conjunto completo de kets base. Encuentre la representación matricial del operador $|\alpha\rangle\langle\beta|$ en esta base.
   (b) Considere ahora un sistema de espín $1/2$ y sean $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ iguales a $|s_z = \hbar/2\rangle$ y $|s_x = \hbar/2\rangle$ respectivamente. Escriba explicitamente la matriz cuadrada que corresponde a $|\alpha\rangle\langle\beta|$ en la base usual (s_z diagonal).

4. Suponga que $|i\rangle$ y $|j\rangle$ son autoestados de algún operador hermítico A. ¿Bajo qué condiciones se puede concluir que $|i\rangle + |j\rangle$ también es autoestado de A? Justifique.

5. Considere un espacio de kets generado por los autokets $\{|a_i\rangle\}$ de un operador hermítico A. No hay degeneración.
   (a) Pruebe que
   $$\prod_i (A - a_i)$$
   es el operador nulo.
   (b) ¿Cuál es el significado del operador
   $$\prod_{i\neq j} \frac{(A - a_i)}{(a_j - a_i)} \quad ?$$
   (c) Ilustre los dos puntos anteriores usando $A = S_z$ de un sistema de espín $1/2$.

6. Un cierto observable en mecánica cuantica tiene una representación matricial de 3×3 como sigue
   $$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) Encuentre los autovectores normalizados de este observable y los correspondientes autovalores. ¿Hay degeneración?

(b) De un ejemplo físico donde todo esto sea relevante.

7. Sean A y B dos observables. Suponga que los autokets simultaneos de A y B $\{|a_i, b_i\rangle\}$ forman un conjunto ortonormal completo de kets base. ¿Se puede siempre concluir que $[A, B] = 0$? Si su respuesta es sí, pruébela. Si es no, de un contraejemplo.

8. Considere un espacio de kets tridimensional. Si un dado conjunto de kets ortonormales, digamos $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$, se usan como kets base, los operadores A y B están representados por

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix}$$

donde a y b son reales.

(a) Obviamente A tiene un espectro degenerado. ¿También lo tiene B ?

(b) Muestre que A y B conmutan.

(c) Encuentre un nuevo conjunto de kets ortonormales que sean autokets simultaneos de A y B. Especifique los autovalores de A y B para cada uno de los tres autokets. ¿La especificación de los autovalores caracteriza completamente a cada autoket?

9. Considere un sistema físico cuyo espacio de estados está desarrollado en la base $\{|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle\}$. En esta base, los operadores H y B están dados por

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

mientras que los operadores L y S se definen según

$$L|u\rangle = |u\rangle \quad L|v\rangle = 0 \quad L|w\rangle = -|w\rangle$$
$$S|u\rangle = |w\rangle \quad S|v\rangle = |v\rangle \quad S|w\rangle = |u\rangle$$

(a) Muestre que H y B conmutan. Construya una base de autovectores comunes a ambos.

(b) ¿Cuáles de los conjuntos $\{H\}$,$\{B\}$,$\{H, B\}$,$\{H^2, B\}$ son CCOC?

(c) Escriba las matrices que representan a los operadores L, L^2, S, y S^2 en la base $\{|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle\}$. ¿Son estos operadores observables?

10. Dos operadores hermíticos anticonmutan, es decir que $\{A, B\} = AB + BA = 0$. ¿Es posible tener un autoket común de A y B? Pruebe o ilustre su conclusión.

11. Dos observables A_1 y A_2, que no involucran explicitamente el tiempo, no conmutan ($[A_1, A_2] \neq 0$), pero se sabe que ambos conmutan con el hamiltoniano ($[A_1, H] = [A_2, H] = 0$). Pruebe que los autoestados de energía son, en general, degenerados. ¿Hay excepciones? Como un ejemplo, puede pensar en el problema de fuerzas centrales $H = p^2/2m + V(r)$, con $A_1 \to L_z$ y $A_2 \to L_x$.

12. Sean A y B, dos operadores que conmutan con $[A, B]$. Demostrar que

$$[A^m, B] = mA^{m-1}[A, B].$$

Use esta propiedad para demostrar que

$$[f(A), B] = \frac{df(A)}{dA}[A, B].$$

13. Considerar los operadores A, L y $A(s)$, siendo s un parámetro real o complejo

$$A(s) \equiv e^{sL} A e^{-sL}.$$

Demostrar:

(a) $\frac{dA(s)}{ds} = [L, A(s)]$

(b) $\frac{d^2A(s)}{ds^2} = [L, [L, A(s)]]$

(c) $\frac{d^3A(s)}{ds^3} = [L, [L, [L, A(s)]]]$

Utilice esto para expandir $\hat{A}(1)$ en una serie de Taylor, y demostrar que

$$e^L A e^{-L} = A + L, A] + \frac{1}{2!}[L, [L, A]] + \frac{1}{3!}[L, [L, [L, A]]] + \dots$$

14. Sean A y B, dos operadores que conmutan con $[A, B]$. Demostrar que

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$$

Ayuda:

(a) Mostrar que $[e^{\eta A}, B] = \eta e^{\eta A}[A, B]$

(b) Definimos $g(\eta) \equiv e^{\eta A} e^{\eta B} e^{-\eta(A+B)}$. Demostrar que la derivada es: $\frac{dg}{d\eta} = \eta[A, B]g$.

(c) Integrar la ecuación anterior.

15. (a) Considere un operador tal que $A^2 = I$ (dé un ejemplo concreto de un operador de ese tipo). Demuestre que para todo número real o complejo α y cualquier función f que pueda ser expresada en serie de potencias de su argumento vale que

$$f(\alpha A) = \frac{1}{2}(f(\alpha) + f(-\alpha))I + \frac{1}{2}(f(\alpha) - f(-\alpha))A$$

En particular muestre que: $\exp(-i\alpha A) = \cos\alpha\, I - \; i\, A \sin\alpha$.

(b) Demuestre que para todo número real o complejo α y cualquier función f que pueda ser expresada en serie de potencias de su argumento vale que

$$f(\alpha B) = f(0)I + (\frac{1}{2}(f(\alpha) + f(-\alpha)) - f(0))B^2 + \frac{1}{2}(f(\alpha) - f(-\alpha))B$$

Considere un operador B tal que $B^3 = B$ (podría encontrar un ejemplo?). En particular muestre que:

$$\exp(-i\alpha B) = I + (\cos\alpha - 1)B^2 - i \sin\alpha B$$

16. Construya la matriz de transformación que conecta la base donde S_z es diagonal con la base en que S_x es diagonal. Muestre que su resultado es consistente con la relación general

$$U = \sum_r \left| b^{(r)} \right\rangle \left\langle a^{(r)} \right| \; .$$

17. (a) Suponga que $f(A)$ es una función de un operador hermítico A con la propiedad $A\,|a'\rangle = a'\,|a'\rangle$. Evalúe $\langle b''|f(A)|b'\rangle$ suponiendo que se conoce la matriz de transformación entre la base a' y la base b'.

Parte II: Espacios de dimensión infinita. El caso continuo.

18. (a) Sea x y p_x la coordenada y el momento lineal en una dimensión. Evalúe el corchete de Poisson clásico

$$\{x, F(p_x)\}_{\text{clásico}} \; .$$

(b) Sean ahora x y p_x los correspondientes operadores cuánticos. Evalúe el conmutador

$$[x, \exp(\frac{ip_x a}{\hbar})] \; ,$$

y compare con (a) cuando $F(p_x) = \exp(ip_x a/\hbar)$.

(c) Usando el resultado de (b), pruebe que

$$\exp(\frac{ip_x a}{\hbar}) \, |x'\rangle \qquad \text{con} \quad x\,|x'\rangle = x'\,|x'\rangle$$

es un autoestado del operador x. ¿Cuál es el correspondiente autovalor?

19. (a) Verifique que las igualdades

$$[x_i, G(\mathbf{p})] = i\hbar \frac{\partial G}{\partial p_i} \qquad\qquad [p_i, F(\mathbf{x})] = -i\hbar \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

pueden derivarse a partir de las relaciones de conmutación fundamentales, para cualquier par de funciones F y G que puedan ser expresadas en serie de potencias de su argumento.

(b) Evalúe $[x^2, p^2]$. Compare su resultado con el corchete de Poisson clásico $\{x^2, p^2\}_{\text{clásico}}$.

20. El operador de traslación para un desplazamiento espacial finito está dado por

$$\mathcal{T}(\mathbf{l}) = \exp\left(\frac{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{l}}{\hbar}\right)$$

donde $\mathbf{p}$ es el operador impulso.

(a) Evalue $[x_i, \mathcal{T}(\mathbf{l})]$.

(b) Usando (a) (o de alguna otra forma), demuestre como el valor de expectación $\langle \mathbf{x} \rangle$ cambia frente a traslaciones.

21. (a) Pruebe lo siguiente

$$\begin{aligned} \langle p'|x|\alpha\rangle &= i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \langle p'|\alpha\rangle \\ \langle \beta|x|\alpha\rangle &= \int dp' \psi_\beta^*(p') i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \psi_\alpha(p') \end{aligned}$$

donde $\psi_\alpha(p') = \langle p'|\alpha\rangle$ y $\psi_\beta(p') = \langle p'|\beta\rangle$ son las funciones de onda en el espacio de momentos.

(b) ¿Cuál es el significado físico de $\exp(ix\Xi/\hbar)$, donde x es el operador posición y Ξ es algún número con dimensiones de momento? Justifique su respuesta.