Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2016
Guía 5: Oscilador armónico y potenciales

1. Usando el oscilador armónico unidimensional como ejemplo, ilustre la diferencia entre los esquemas de Heisenberg y Schrödinger. Discuta en particular cómo evolucionan en el tiempo en ambos esquemas:
   (a) las variables dinámicas x y p,
   (b) el vector de estado más general.

2. Considere un oscilador armónico en una dimensión.
   (a) Usando
   $$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right), \quad a\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle,$$
   $$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right), \quad a^\dagger\left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle,$$
   evalúe $\langle m|x|n\rangle$, $\langle m|p|n\rangle$, $\langle m|\{x,p\}|n\rangle$, $\left\langle m|x^2|n\right\rangle$ y $\left\langle m|p^2|n\right\rangle$
   (b) Compruebe que se cumple el teorema del virial para los valores de expectación de la energía cinética y potencial tomados con respecto a un autoestado de la energía.

3. Utilizando los resultados del ejercicio anterior, muestre que los autoestados del oscilador armónico unidimensional satisfacen la siguiente relación,
   $$\left\langle(\Delta x)^2\right\rangle\left\langle(\Delta p)^2\right\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\hbar^2 .$$
   ¿Qué ocurre para $n = 0$? ¿Qué condición impone esto sobre la función de onda del estado fundamental?

4. Usando que $a\left|0\right\rangle = 0$ y $a^\dagger\left|0\right\rangle = \left|1\right\rangle$, obtenga las funciones de onda para el estado fundamental $\langle x|0\rangle$, y el primer estado excitado $\langle x|1\rangle$, del oscilador armónico unidimensional.

5. (a) Usando
   $$\left\langle x'|p'\right\rangle = (2\pi\hbar)^{-1/2}\exp\left(\frac{ip'x'}{\hbar}\right)$$
   pruebe que
   $$\left\langle p'|x|\alpha\right\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\left\langle p'|\alpha\right\rangle .$$
   (b) Considere un oscilador armónico en una dimensión. Partiendo de la ecuación de Schrödinger para el vector de estado, deduzca la ecuación de Schrödinger para la función de onda en el espacio de momentos (tenga cuidado en distinguir bien al operador p de su autovalor). ¿Puede dar las autofunciones de la energía en el espacio de momentos?

6. Considere la función, conocida como función de correlación, definida como
   $$C(t) = \langle x(t)x(0)\rangle,$$
   donde $\langle x(t)\rangle$ es el operador de posición en la representación de Heisenberg. Evalúe explicitamente la función de correlación para el estado fundamental de un oscilador armónico en una dimensión.

7. Considere nuevamente un oscilador armónico en una dimensión. Sin trabajar con las funciones de onda:

   (a) Construya una combinación lineal de $|0\rangle$ y $|1\rangle$ que maximice $\langle x\rangle$.

   (b) Considere que el oscilador se encuentra a $t = 0$ en el estado hallado en el punto (a). ¿Cuál es el vector de estado para $t > 0$ en la representación de Schrödinger ? Evalúe el valor de expectación $\langle x\rangle$ como función del tiempo para $t > 0$ usando: (i) la representación de Schrödinger, y (ii) la representación de Heisenberg.

   (c) Evalue $\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle$ como función del tiempo en ambas representaciones.

8. Demuestre que para un oscilador armónico en una dimensión se verifica

$$\left\langle 0 \left| e^{ikx} \right| 0 \right\rangle = \exp\left(-\frac{k^2}{2} \left\langle 0 \left| x^2 \right| 0 \right\rangle \right)$$

   donde x es el operador de posición.

9. Considere una partícula sujeta a un potencial de oscilador armónico en una dirección. Suponga que a $t = 0$ el estado viene dado por

$$|\varphi\rangle = \exp\left(\frac{-ipd}{\hbar}\right)|0\rangle \, ,$$

   donde p es el operador de momento y d es un número con dimensiones de longitud. Usando la representación de Heisenberg, evalúe el valor de expectación $\langle x\rangle$ para $t > 0$. Muestre que $|\varphi\rangle$ es autoestado del operador de destrucción a y calcule su autovalor. Interprete el resultado. ¿Qué tipo de estado describe $|\varphi\rangle$?

10. Se definen los estados coherentes de un oscilador armónico en una dimensión como los autoestados del operador de aniquilación a,

$$a\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle \, ,$$

   donde λ es en general un número complejo (note que a es no hermitíco).

   (a) Demuestre que

$$|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2} e^{\lambda a^\dagger}\,|0\rangle$$

   es un estado coherente normalizado.

   (b) Demuestre que estos estados verifican la relación de mínima incerteza.

   (c) Pruebe que un estado coherente se puede obtener también mediante la aplicación del operador de traslación $\exp(-ipl/\hbar)$ (siendo p el operador de momento y l la distancia desplazada) al estado fundamental.

11. Escriba la función de onda (en el espacio de coordenadas) para el estado especificado en el problema 9 a $t = 0$. Puede usar

$$\left\langle x'|0 \right\rangle = \pi^{-1/4} x_0^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x'}{x_0}\right)^2 \right] \quad \text{donde} \;\; x_0 = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} .$$

   Obtenga luego una expresión simple para la probabilidad de que la partícula se encuentre en el estado fundamental a $t = 0$. ¿Cambia esta probabilidad para $t > 0$?

12. Considere un autoestado del operador de destrucción a

$$a\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \;\; ,$$

   donde $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Calcule $\langle H\rangle$, $\langle p\rangle$ y $\langle x\rangle$ en un estado $|\alpha\rangle$ y muestre que satisfacen la misma relación que las variables clásicas $E = p^2/2m + m\omega^2x^2/2$ para $E \gg \hbar\omega$. ¿Qué condicion impone ésto para los valores de α?

(b) Halle la evolución temporal de $|\alpha\rangle$ desarrollándolo en la base $\{|n\rangle\}$ de autoestados de H. Muestre que el estado continúa siendo autoestado del operador a, pero que el autovalor α varía en el tiempo. Dibuje en el plano complejo la evolución de α y muestre como varían $\langle H\rangle$ y $\langle p\rangle$ en el tiempo.

(c) Deduzca y resuelva las ecuaciones de evolución en la representación de Heisemberg para los operadores a y $a^\dagger$.

(d) Si se mide la energía del sistema, ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

13. Considere una partícula en una dimensión cuyo movimiento esta gobernado por el Hamiltoniano

$$H = \hbar g(a^\dagger a)^2.$$

donde $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{x}{\sigma} + i\frac{p}{\hbar\sigma})$ y $\sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

(a) Calcule los autoestados y autovalores de H.

(b) Suponga que a $t = 0$ se prepara al sistema en el estado

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle,$$

donde $|0\rangle$, $|1\rangle$ y $|2\rangle$ son los tres primeros estados del oscilador armónico. ¿Cuál es la probabilidad de que a tiempo T el sistema este en su estado fundamental?

(c) Suponga ahora que a $t = 0$ se prepara al sistema en un estado coherente de un oscilador armónico de frecuencia ω $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$. ¿Como es $|\psi(T)\rangle$?. Escriba $|\psi(T)\rangle$ en los casos en que $T = 2\pi/g$ y $T = \pi/g$.

(d) Elegimos $T = \pi/(2g)$. Muestre que

$$|\psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\exp(-i\pi/4)|\alpha\rangle + \exp(i\pi/4)| - \alpha\rangle$$

(e) Si α es imaginario puro, discuta las propiedades físicas del estado descrito en (d). En ese caso calcule el valor medio de la posición y el momento.

14. Considere una partícula sometida a un potencial de la forma

$$V = \begin{cases} kx^2/2 & x > 0 \\ \infty & x < 0. \end{cases}$$

(a) ¿Cuál es la energía del estado fundamental?

(b) ¿Cuál es el valor de expectación $\left\langle x^2\right\rangle$ para el estado fundamental?

15. Una partícula en una dimensión está atrapada entre dos paredes rígidas

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < L \\ \infty & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A $t = 0$ la partícula está en $x = L/2$ con certeza. ¿Cuáles son las probabilidades relativas de que la partícula se encuentre en distintos autoestados de energía? Escriba la función de onda para $t \geq 0$ (no necesita preocuparse por la normalización absoluta, convergencia u otras sutilezas matemáticas).

16. Considere una partícula en una dimensión ligada a un centro fijo por un potencial tipo δ de la forma $V(x) = -\lambda\delta(x)$, donde λ es un número real y positivo. Encuentre la función de onda y la energía de ligadura del estado fundamental. ¿Hay estados excitados ligados?

17. Una partícula de masa m en una dimensión está ligada a un centro fijo por un potencial atractivo tipo delta

$$V(x) = -\lambda\delta(x) \quad , \quad (\lambda > 0).$$

A $t = 0$ se apaga repentinamente el potencial (es decir, $V = 0$ para $t > 0$). Encuentre la función de onda para $t > 0$ (sea cuantitativo, no es necesario evaluar una integral que pueda aparecer).

18. Una partícula en una dimensión ($-\infty < x < \infty$) está sometida a una fuerza que puede derivarse de un potencial de la forma

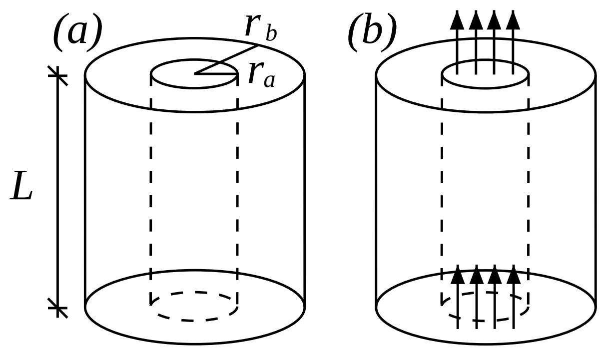
$$V(x) = \lambda x \quad , \quad (\lambda > 0).$$

(a) ¿Es el espectro de energía discreto o continuo? Escriba una expresión aproximada para la autofunción de energía especificada por E. Dibujela cualitativamente.

(b) Discuta brevemente qué cambios son necesarios si V es reemplazado por $V = \lambda|x|$.

19. Considere una partícula que puede moverse en las paredes de un cilindro infinito de radio R, sometida a un potencial $V = kz^2$. El eje del cilindro coincide con el eje z. Calcule los autoestados y autovalores de H. Compare con el caso en el que $R \to \infty$ (partícula sobre el plano).

20. Considere un electrón confinado en la región encerrada entre dos paredes cilíndricas cuyos ejes coinciden con el eje z, como se muestra en la figura. La función de onda debe anularse en las paredes de los cilindros, de radio r_a y r_b respectivamente ($r_a < r_b$), y también en las tapas de los cilindros ubicadas en $z = 0$ y $z = L$.



(a) Encuentre las autofunciones de la energía (no se preocupe por la normalización). Muestre que los autovalores de la energía están dados por

$$E_{lmn} = \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left[k_{mn}^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)\right] \qquad (l = 1, 2, 3, \ldots, m = 0, 1, 2, \ldots) \ ,$$

donde k_{mn} es la raíz n-ésima de la ecuación trascendental

$$J_m(k_{mn}r_b)\, N_m(k_{mn}r_a) - J_m(k_{mn}r_a)\, N_m(k_{mn}r_b) = 0 \ .$$

(b) Repita el mismo problema cuando existe un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\hat{z}$ en la región $r < r_a$. Considere para ello un potencial vector de la forma

$$\mathbf{A} = \frac{Br_a^2}{2r}\hat{\varphi} \ ,$$

y note que en la ecuación de Schrödinger solo necesita reemplazar el operador ∇ por $\nabla - ie\mathbf{A}/\hbar c$. Observe que los autovalores de energía cambian aunque el electrón no entra en la región donde se encuentra el campo magnético.

(c) ¿Qué ocurre con los autovalores de la energía cuando $L \to \infty$?

(d) Compare los resultados obtenidos en (a) y (b). Muestre que para que los niveles de energía no cambien se debe introducir un número entero de cuantos de flujo magnético

$$\pi r_a^2 B = \frac{2\pi N\hbar c}{e} \qquad (N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \ .$$

21. Un electrón se mueve en la presencia de un campo magnético uniforme en la dirección z ($\mathbf{B} = B\hat{z}$).

(a) Evalúe $[\Pi_x, \Pi_y]$, donde

$$\Pi_x = p_x - \frac{eA_x}{c} \qquad \Pi_y = p_y - \frac{eA_y}{c} \ . \tag{1}$$

(b) Comparando el hamiltoniano del problema y las relaciones de conmutación obtenidas en (a) con las expresiones correspondientes al problema del oscilador armónico unidimensional, muestre que los autovalores de energía de este problema son

$$E_{kn} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{|eB|\hbar}{mc}\left(n + \frac{1}{2}\right) \ , \tag{2}$$

donde $n = 0, 1, 2, \ldots$, y $\hbar k$ es el autovalor contínuo del operador p_z.