Física Teórica 2 (2016 - 1C)

Modelo de Primer Parcial

1. En un sistema de espín 1 (con un espacio de estados de dimensión 3) se define los siguientes operadores de espín en una cierta base ortonormal

$$S_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considere un haz de partículas de espín 1 que ingresa en un sistema de medición consistente en tres aparatos Stern Gerlach (SG) mostrado en la figura. El campo magnético del primero está en la dirección $\mathbf{z}$ y se deja pasar solo partículas con $S_z = \hbar$.

El segundo SG, orientado según la dirección $\mathbf{n}$, en el plano xz y formando un ángulo $\beta = \pi/4$ con el eje $\mathbf{z}$, deja pasar solo las partículas con $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \hbar$. El haz resultante ingresa a un tercer SG orientado en dirección $\mathbf{z}$ y deja pasar solo partículas con $S_z = -\hbar$.

   a) Encuentre los autovectores y autovalores de $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ en esta base.

   b) Determine el estado en que se encuentran las partículas al salir del SG2 en esta base.

   c) ¿Qué fracción de las partículas que atraviesan el primer SG continua luego del tercer SG?

2. Sea un sistema con un espacio de estados de cuatro dimensiones, del cual $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, |u_4\rangle\}$ es una base ortonormal. Las matrices del Hamiltoniano H y los operadores A y B en esa base son

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \frac{b}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde ω_0, a, y b son constantes positivas. En $t = 0$ el estado del sistema es $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$.

   a) En $t = 0$ se mide H. ¿Qué valores pueden encontrarse y con que probabilidad? Calcule $\langle H\rangle$ y $\langle \Delta H\rangle$ para el estado $|\psi(0)\rangle$.

   b) Si en $t = 0$ en lugar de medir H se mide A, ¿qué resultados pueden obtenerse y con qué probabilidad?.
   Si se midió A a un tiempo $t = 0$ y se obtuvo $2a$, ¿qué valores se pueden obtener si se vuelve a medir A a un tiempo t?.

   c) Si en lugar de medir A se mide B a $t = 0$ y se obtiene 0, encuentre la probabilidad de volver a medir el mismo valor de B al tiempo t.

3. Considere un oscilador armónico de frecuencia ω sujeto a una perturbación cuyo Hamiltoniano está dado por:

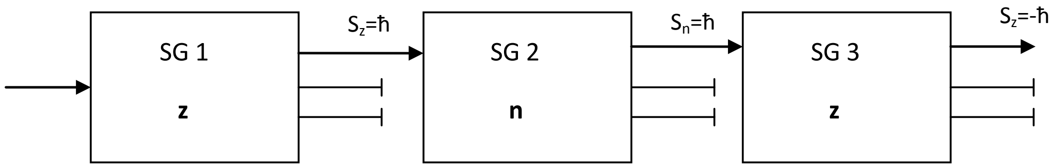
$$\hat{H} = \hbar\omega a^\dagger a + i\hbar\Lambda(\hat{a}^{\dagger 2} e^{-2i\omega t} - \hat{a}^2 e^{2i\omega t}),$$

siendo $\hat{a}^\dagger$ y $\hat{a}$ los operadores de creación y aniquilación. El primer término del Hamiltoniano corresponde al oscilador libre. El segundo término describe la interacción del oscilador libre con una onda clásica de frecuencia 2ω que excita (desexcita) dos niveles del oscilador mediante un proceso llamado de amplificación paramétrica. Λ es un parámetro real que caracteriza la intensidad de la interacción.

   a) Halle la ecuación de movimiento para el operador $\hat{a}(t)$ en la representación de Heisenberg.

   b) Definiendo $\hat{b}(t) = e^{i\omega t}\hat{a}(t)$ escriba y resuelva las ecuaciones para los operadores $\hat{b}(t)$ y $\hat{b}^\dagger(t)$.

   c) Considerando que a $t = 0$ el oscilador está en el estado fundamental $|0\rangle$, calcule el valor medio del operador de número $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ al tiempo t .


SG 1
z
$S_z=\hbar$
SG 2
n
$S_n=\hbar$
SG 3
z
$S_z=-\hbar$