

## Física Teórica 2

### Primer cuatrimestre de 2016 Guía 6: Rotaciones e Impulso angular

1. Considere la matriz de  $2 \times 2$

$$U = \frac{a_0 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}}{a_0 - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}},$$

donde  $a_0$  es un número real, y  $\mathbf{a}$  es un vector de 3 componentes reales.

- (a) Pruebe que  $U$  es unitaria y unimodular.
- (b) En general, una matriz unitaria unimodular de  $2 \times 2$  representa una rotación en tres dimensiones. Encuentre el eje y el ángulo de rotación para  $U$  en términos de  $a_0$  y las componentes del vector  $\mathbf{a}$ .
2. Considere una partícula de espín 1. Evalúe los elementos de matriz de  $S_z(S_z + \hbar)(S_z - \hbar)$  y de  $S_x(S_x + \hbar)(S_x - \hbar)$  sin usar la representación matricial de  $S_x$ .
3. Considere el hamiltoniano de un cuerpo rígido

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{K_1^2}{I_1} + \frac{K_2^2}{I_2} + \frac{K_3^2}{I_3} \right)$$

donde  $\mathbf{K}$  es el impulso angular en el sistema de coordenadas fijo al cuerpo. A partir de esta expresión obtenga la ecuación de movimiento de Heisenberg para  $\mathbf{K}$ , y luego halle las ecuaciones de movimiento de Euler en el límite correspondiente.

4. ¿Cuál es el significado de la ecuación  $U^{-1}A_kU = \sum R_{kl}A_l$ , donde las tres componentes de  $A$  son matrices? A partir de esta ecuación, muestre que los elementos de matriz  $\langle m|A_k|n \rangle$  se transforman como vectores.
5. Considere un estado arbitrario  $|\alpha\rangle$  de un sistema de espín 1/2, sobre el que se aplica una rotación en un ángulo  $\varphi$  alrededor del eje  $z$ ,

$$|\alpha\rangle_R = \exp\left(-i\frac{S_z\varphi}{\hbar}\right)|\alpha\rangle.$$

- (a) Calcule  $\langle S_x \rangle_R$  en el sistema rotado, en función de los valores de expectación  $\langle S_x \rangle$  y  $\langle S_y \rangle$  en el sistema original.
- (b) Muestre que para una rotación de  $2\pi$  en  $\varphi$  se satisface

$$|\alpha\rangle_R = -|\alpha\rangle.$$

Observe que no se obtiene el mismo estado debido a un factor de fase. ¿Puede observarse este efecto? Vea *Phys. Rev. Lett* **35**, 1053 (1975), o *Phys. Today*, Dic. 1980, pag. 24.

6. (a) Usando las propiedades de conmutación y anticonmutación de las matrices de Pauli, pruebe la identidad

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

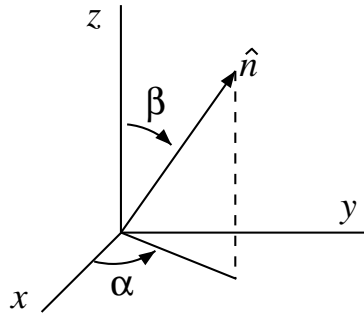
donde  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son dos vectores complejos en tres dimensiones.

- (b) Usando (a), muestre que el operador rotación para un sistema de espín 1/2 en la base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  se puede escribir como

$$\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}, \phi) = \exp\left(-i\frac{\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}\phi}{\hbar}\right) = I \cos \frac{\phi}{2} - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \sin \frac{\phi}{2},$$

donde  $I$  es la matriz identidad.

- (c) Escriba explícitamente la matriz de  $2 \times 2$  que representa la rotación  $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}, \phi)$ .
- (d) Sea  $\hat{\mathbf{n}}$  el versor definido por los ángulos polares  $\alpha$  y  $\beta$  según se muestra en la figura. Aplique al ket  $|+\rangle$  el operador de rotación adecuado para obtener el estado  $|\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}, +\rangle$ , que representa un espín orientado según  $\hat{\mathbf{n}}$ . Compare el resultado con el obtenido en el problema 10 de la guía 1.



7. Considere la secuencia de rotaciones de Euler de un sistema de espín 1/2 representada por

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{D}(\hat{\mathbf{z}}, \alpha)\mathcal{D}(\hat{\mathbf{y}}, \beta)\mathcal{D}(\hat{\mathbf{z}}, \gamma).$$

- (a) Muestre que la matriz de  $2 \times 2$  que representa esta rotación es

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma) &= \exp\left(-i\frac{\sigma_z\alpha}{2}\right) \exp\left(-i\frac{\sigma_y\beta}{2}\right) \exp\left(-i\frac{\sigma_z\gamma}{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \cos \frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2} \sin \frac{\beta}{2} \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2} \sin \frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2} \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (b) Debido a las propiedades del grupo de las rotaciones, esperamos que esta secuencia de operaciones sea equivalente a una única rotación alrededor de algún eje con ángulo  $\theta$ . Encuentre  $\theta$  y la dirección de dicho eje.

8. Sea  $\mathbf{J}$  un operador de momento angular cualquiera, es decir que sus componentes satisfacen las relaciones de conmutación  $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$ .

- (a) Se definen los operadores de subida y bajada en la forma  $J_+ = J_x + iJ_y$  y  $J_- = J_x - iJ_y$ . Demostrar las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} [J_+, J_-] &= 2\hbar J_z, & [J_z, J_+] &= \hbar J_+, & [J_z, J_-] &= -\hbar J_- \\ J_+ J_- &= J^2 - J_z^2 + \hbar J_z \\ J_{\pm} |j, m\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle \\ J_{\pm} |j, \pm j\rangle &= 0. \end{aligned}$$

- (b) Mostrar que cualquier estado de  $J_z$  satisface  $\langle J_x \rangle = \langle J_y \rangle = 0$ , y que si en cierto estado  $|\psi\rangle$  se satisface  $J_z |\psi\rangle = \hbar m |\psi\rangle$ , entonces sobre ese estado el valor medio de la proyección del impulso angular  $\mathbf{J}$  sobre una dirección  $\hat{\mathbf{n}}$  que forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$  es  $\langle \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rangle = \hbar m \cos \theta$ . Interprete el resultado.

9. Construya, por aplicación de los operadores de subida y de bajada, las matrices que representan a los operadores  $L^2$ ,  $L_x$ ,  $L_y$ , y  $L_z$  en el subespacio generado por la base  $\{|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle\}$  de autoestados de  $L^2$  y  $L_z$ . Verifique explícitamente multiplicando las matrices la relación  $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$ .

(a) Encuentre la base  $\{|l, m_y\rangle\}$  de autoestados de  $L^2$  y  $L_y$  de dicho subespacio. Escríbala como combinación lineal de los  $|l, m\rangle$ .

(b) Sea un estado descrito por el vector

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 1\rangle - |1, -1\rangle) .$$

Si se mide  $L_x$ , ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades? Repita el cálculo si se mide  $L_y$ .

(c) Sobre el estado  $|\psi\rangle$  se mide  $L_z$  y se obtiene  $\hbar$ , e inmediatamente después se mide  $L_y$ . ¿Qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

10. Un autoestado de momento angular  $|j, j\rangle$  se rota en un ángulo infinitesimal  $\epsilon$  alrededor del eje y. Sin usar explícitamente la forma de la función  $d_{m'm}^{(j)}$ , obtenga una expresión para la probabilidad de que el nuevo estado rotado se encuentre en el estado original, hasta términos de orden  $\epsilon^2$

11. Muestre que las matrices de  $3 \times 3$   $G_i$  ( $i=1,2,3$ ) cuyos elementos están dados por  $(G_i)_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk}$ , donde  $j$  y  $k$  son índices de fila y de columna, satisfacen las relaciones de conmutación del momento angular. ¿Cuál es el significado físico (o geométrico) de la transformación matricial que conecta a  $G_i$  con las representaciones de  $3 \times 3$  más usuales del operador de momento angular  $J_i$ , con  $J_z$  diagonal? Relacione su resultado con la transformación

$$\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V} + \hat{\mathbf{n}} \delta\phi \times \mathbf{V} ,$$

bajo rotaciones infinitesimales. [Nota: este problema puede resultar útil para entender el espín del fotón.]

12. Construya los armónicos esféricos  $Y_{1,m}$ . Para ello, resuelva primero  $L_+ Y_{1,1} = 0$  ( $L_+$  en la representación  $r$ ) y aplique luego el operador  $L_-$  a  $Y_{1,1}$  (previamente normalizado) para hallar los otros dos restantes. Usando los resultados del problema 12, escriba la combinación lineal de estos que es autoestado de  $L_y$  con autovalor  $\hbar$ . Verifique su resultado aplicándole  $L_y$  en la representación  $r$ .

13. Suponga que fuera posible un valor semi-entero de  $l$ , por ejemplo  $1/2$ , para el impulso angular orbital. A partir de

$$L_+ Y_{1/2,1/2}(\theta, \phi) = 0$$

podemos deducir, como de costumbre

$$Y_{1/2,1/2}(\theta, \phi) \propto e^{i\phi/2} \sqrt{\sin\theta} .$$

Intente construir entonces  $Y_{1/2,-1/2}(\theta, \phi)$  de dos maneras diferentes:

(a) aplicando  $L_-$  a  $Y_{1/2,1/2}(\theta, \phi)$ ,

(b) usando que  $L_- Y_{1/2,-1/2}(\theta, \phi) = 0$ .

Muestre que los dos procedimientos llevan a resultados contradictorios (esto da un argumento en contra de valores semi-enteros de  $l$ ).

14. Considere un autoestado de impulso angular orbital  $|l = 2, m = 0\rangle$ . Suponga que este estado es rotado en un ángulo  $\beta$  alrededor del eje  $y$ . Encuentre la probabilidad de que el nuevo estado se encuentre en  $m = 0, \pm 1, \text{ y } \pm 2$ .

15. (a) Considere un sistema con  $j = 1$ . Escriba explícitamente

$$\langle j = 1, m' | J_y | j = 1, m \rangle$$

como matriz de  $3 \times 3$ .

(b) Muestre que en el caso particular  $j = 1$ , es legítimo reemplazar  $e^{iJ_y\beta/\hbar}$  por

$$1 - i \left( \frac{J_y}{\hbar} \right) \sin \beta - \left( \frac{J_y}{\hbar} \right)^2 (1 - \cos \beta).$$

(c) Usando (b) obtenga

$$d^{(j=1)}(\beta) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)(1 + \cos \beta) & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin \beta & \left(\frac{1}{2}\right)(1 - \cos \beta) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin \beta & \cos \beta & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin \beta \\ \left(\frac{1}{2}\right)(1 - \cos \beta) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin \beta & \left(\frac{1}{2}\right)(1 + \cos \beta) \end{pmatrix}.$$

16. La función de onda de una partícula sujeta a un potencial esféricamente simétrico  $V(r)$  está dada por:

$$\Psi(x) = (x + y + 3z) f(r).$$

(a) ¿Es  $\Psi$  autofunción de  $L^2$ ? Si es así, ¿cuál es el valor de  $l$ ? Si no es así, ¿cuáles son los posibles valores de  $l$  que pueden ser obtenidos cuando se mide  $L^2$ ?

(b) ¿Cuáles son las probabilidades de hallar a la partícula en los distintos estados con  $m$  definido?

(c) Suponga que se conoce de alguna manera que  $\Psi(x)$  es una autofunción de energía con autovalor  $E$ . Indique cómo puede hallarse  $V(r)$ .

17. Usando coordenadas esféricas, obtenga una expresión para la corriente de probabilidad  $\mathbf{j}$  para el estado fundamental y los excitados del átomo de hidrógeno. Muestre en particular que, para los estados con  $m \neq 0$ , existe un flujo toroidal en el sentido de que  $\mathbf{j}$  está en la dirección de  $\phi$  creciente o decreciente dependiendo del signo de  $m$ .

18. Considere un oscilador armónico tridimensional isótropo.

(a) Resuelva la ecuación de Schrödinger en coordenadas cartesianas suponiendo conocidas las soluciones en una dimensión. Encuentre los niveles de energía y las funciones de onda. Discuta la paridad y encuentre la degeneración.

(b) Resuelva en coordenadas esféricas. La ecuación radial se puede resolver usando la sustitución  $r^2 = x$ . Multiplicando las funciones de onda por  $x^{1/4}$  el problema se reduce al del átomo de hidrógeno cuya solución se supone conocida. Encuentre los niveles de energía y discuta la paridad y la degeneración. Compare el resultado con (a). ¿De qué conjunto completo de operadores son autoestados estas soluciones?

19. Para una partícula sometida a un potencial de oscilador armónico tridimensional isótropo (suponga que todos los parámetros de longitud y energía valen 1) considere el estado definido por

$$\psi(x, y, z) = C(1 + x + y) \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right), \quad C = \frac{1}{\pi^{3/4}\sqrt{2}}.$$

Calcule qué valores pueden medirse y con qué probabilidad de las siguientes magnitudes:  $L^2$ ,  $L_z$ ,  $L_x$ , y  $H$ .