Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2016
Guía 9: Matriz densidad

1. Sobre un sistema se mide cierta magnitud A. El valor medio de los resultados de la medición $\langle A\rangle$ tiene una probabilidad p_n de ser igual a $\langle A\rangle_n$, donde
$$\langle A\rangle_n = \langle n|A|n\rangle \ ,$$
y donde $\{|n\rangle\}$ es una base ortonormal. La mezcla estadística de los estados dinámicos representados por los kets $|n\rangle$ se puede describir mediante el operador densidad
$$\rho = \sum_n |n\rangle\, p_n\, \langle n| \ .$$
donde $\sum_n p_n = 1$, y $p_n \geq 0$ para todo n.
   (a) Demuestre que el valor medio del observable A es la traza de ρA, es decir
   $$\langle A\rangle = \mathrm{Tr}(\rho A)\ .$$
   Generalize el resultado para cualquier $\mathrm{F}(A)$.
   (b) Demuestre que ρ es hermítico.
   (c) Demuestre la condición de normalización $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$.

2. Tenga en cuenta el siguiente lema:

   Sea ρ la matriz densidad que representa un estado de un sistema, y sea $\det(\rho)$ *el determinante de dicha matriz. Tenemos pues que si* $\det(\rho) \neq 0$ *entonces ρ representa un estado mixto.*

   (a) Decidir si el lema es verdadero o falso. Sea cual fuere el caso, justificar la respuesta.
   (b) Responder si vale la afirmación recíproca al lema. Esto es, responder si es posible asegurar la naturaleza de estado puro de un estado representado por una matriz densidad ρ con determinante nulo. Demostrar la respuesta.
   (c) Demostrar que para un estado puro $\rho^2 = \rho$, es decir $\mathrm{Tr}(\rho^2) = 1$.

3. Considere la matriz densidad ρ de un espacio de estados de dimensión 2, cuyos elementos están dados por
$$\rho_{ij} = \frac{1}{2} \qquad \text{para todo } i, j \in \{1, 2\}$$
y sea $\{|\psi_i\rangle\}$ la base elegida para representar al estado.
   (a) Determinar si el estado representado por ρ es un estado mixto o un estado puro.
   (b) Escribir los vectores $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ en términos de aquéllos vectores que conforman la base en la cual la matriz densidad es diagonal.
   (c) ¿Es siempre posible diagonalizar la matriz densidad? Justifique su respuesta.

4. Para los siguientes sistemas de espín 1/2, escriba el operador densidad, y la matriz densidad en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.
   (a) Un haz completamente polarizado con S_z+.

(b) Un haz completamente polarizado con S_x+.

(c) Un haz no polarizado, formado por una mezcla incoherente de S_x+ y S_x- en igual cantidad (50%).

(d) Un haz parcialmente polarizado, formado por una mezcla incoherente con 75% de S_z+ y 25% de S_x+.

Para los casos (c) y (d), calcule los valores medios estadísticos $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$ y $\langle S_z \rangle$.

5. (a) Pruebe que la evolución temporal del operador densidad ρ en el esquema de Schrödinger está dada por

$$\rho(t) = U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0) \ ,$$

donde $U(t, t_0)$ es el operador de evolución temporal.

(b) A partir de la ecuación de Schrödinger para el operador $U(t, t_0)$, encuentre la ecuación de Schrödinger para el operador densidad. ¿Cuál es la diferencia fundamental con la correspondiente ecuación de Heisenberg?

(c) Suponga que a $t = 0$ tiene un estado puro. Muestre que el estado no puede evolucionar a uno mixto si la evolución temporal está prescripta por la ecuación de Schrödinger.

6. Considere un sistema de espín $1/2$.

(a) Muestre que la matriz densidad puede ser escrita en la forma

$$\rho = \frac{1}{2}\left(I + \mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) \ ,$$

donde I es el operador identidad, y $\mathbf{P}$ es un vector.

(b) Calcule $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$. ¿Cuál es la interpretación física del vector $\mathbf{P}$?

(c) En presencia de un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\hat{z}$, el hamiltoniano del sistema es

$$H = -\left(\frac{eB}{mc}\right) S_z \ .$$

Encuentre la ecuación de evolución para $\mathbf{P}$. Interprete el resultado.

7. Se fabrican dos haces parcialmente polarizados de partículas de espín 1, según las siguientes proporciones:

(a) 50% $|1,1\rangle_z$, 50% $|1,-1\rangle_z$,

(b) 50% $|1,1\rangle_x$, 50% $|1,-1\rangle_x$,

donde se usó la notación $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,|j,m\rangle_{\mathbf{n}} = m\hbar\,|j,m\rangle_{\mathbf{n}}$. Muestre que ambos dan el mismo $\langle \mathbf{S} \rangle$, pero que las matrices densidad son distintas. Diseñe un experimento que permita distinguirlos.

8. Se colocan dos Stern-Gerlach en serie, el segundo rotado un ángulo α respecto al primero. Incide un haz de partículas no polarizado de espín 1. ¿Qué fracción de éste atravesará el sistema sin desviarse?

9. Considere un sistema de dos spines $1/2$ descrito por el estado singlete $|\Psi\rangle_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)$ (spin total cero).

(a) ¿Es el estado del sistema puro o mixto? Justifique.

(b) ¿Es el estado del sistema entrelazado? Justifique.

(c) Calcule la matriz densidad reducida para la partícula 1 y 2.