Física Teórica 2

Primer cuatrimestre de 2016
Guía 10: Sistemas compuestos-Entrelazamiento Cuántico

1. El hamiltoniano dependiente del espín de un sistema electrón-positrón en presencia de un campo magnético uniforme $B\hat{z}$, puede escribirse como

$$H = A\mathbf{S}^{(e^-)} \cdot \mathbf{S}^{(e^+)} + \left(\frac{eB}{mc}\right)(S_z^{(e^-)} - S_z^{(e^+)}) \; .$$

Suponga que la función de espín del sistema está dada por $|+\rangle_{e-} \otimes |-\rangle_{e+}$.

(a) ¿Es ésta una autofunción de H en el límite $A \to 0$, $eB/mc \neq 0$? Si lo es, ¿cuál es el autovalor de energía? Si no lo es, ¿cuál es el valor de expectación de H?

(b) Repita el problema cuando $eB/mc \to 0$, $A \neq 0$.

2. Considere una partícula de spín $1/2$ que puede moverse en tres dimensiones. Diga cuál es el espacio de estados del sistema y encuentre una base completa del mismo.

(a) Suponga que en el instante $t = 0$ el estado es

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \otimes |\alpha_x\rangle \otimes |\alpha_y\rangle \otimes |\alpha_z\rangle \;\; , \tag{1}$$

donde $|\pm\rangle$ son autoestados de S_z. Los kets $|\alpha_i\rangle$ son estados coherentes caracterizados por valores medios $\Re(\alpha_i) = L_i$, $\Im(\alpha_i) = P_i$ ($\Re$ y $\Im$ denotan parte real e imaginaria respectivamente), dispersión en la posición δ_i, e incerteza mínima. Suponga que el hamiltoniano del sistema es de la forma $H = \lambda z \otimes \sigma_z$ (¿qué unidades tiene la constante λ?). Diga cuál es el estado del sistema a tiempo t (tenga en cuenta que el hamiltoniano solamente depende de la coordenada espacial z, y que por lo tanto la evolución de la parte espacial del estado cuántico es trivial en x y en y).

(b) ¿Cuál es la probabilidad de medir la posición de la partícula en el instante t? ¿Cuál es la probabilidad de medir la componente z del espín en ese instante? Considere el caso particular en que el estado inicial es tal que $P_y = P_z = 0$ y discuta la relación entre este problema y el experimento de Stern y Gerlach.

(c) Repita las consideraciones del item anterior si el hamiltoniano es de la forma $H = \lambda' p \otimes \sigma_z$.

3. Considere un sistema compuesto de dos partes, cada una de las cuales tiene un espacio de estados de dimensión 2 (denotados como $\mathcal{H}_A$y $\mathcal{H}_B$). En cada uno de esos espacios se define una base de estados $\{|+\rangle_A, |-\rangle_A\}$ y $\{|+\rangle_B, |-\rangle_B\}$. Asimismo, se definen observables σ_i^A y σ_i^B ($i = x, y, z$) para ambos sistemas, cuyas representaciones matriciales en estas bases están dadas por las matrices de Pauli.

(a) Encuentre una base del espacio de estados del sistema compuesto $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, cuyos vectores correspondan a estados producto. Encuentre otra base donde los vectores no sean estados producto.

(b) Considere los siguientes conjuntos de observables para el sistema compuesto: $D = \{\sigma_z^A \otimes I^B, I^A \otimes \sigma_z^B\}$, $M = \{\sigma_x^A \otimes \sigma_x^B, \sigma_z^A \otimes \sigma_z^B\}$. Demuestre que tanto D como M son conjuntos completos de observables que conmutan. Encuentre una base de autovectores para los operadores de D, y otra para los de M.

4. Considere los siguientes estados del sistema compuesto descripto en el problema anterior:

$$
\begin{aligned}
|\Phi\rangle_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|{+}{+}\rangle \pm |{-}{-}\rangle\right) \\
|\Psi\rangle_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|{+}{-}\rangle \pm |{-}{+}\rangle\right) \ .
\end{aligned}
$$

   (a) Calcule las probabilidades de los resultados posibles en la medición de un observable cualquiera sobre el subsistema A.

   (b) Para cada uno de los estados $|\Phi\rangle_{\pm}$ y $|\Psi\rangle_{\pm}$ calcule el valor medio de los observables $\hat{\mathbf{n}}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_A \otimes \hat{\mathbf{n}}_B \cdot \boldsymbol{\sigma}_B$, donde $\hat{\mathbf{n}}_A$ y $\hat{\mathbf{n}}_B$ son dos versores arbitrarios.

5. Se prepara un sistema compuesto de dos partículas de spin 1/2 en el estado $|\Psi\rangle_{-}$.

   (a) Mostrar que este estado es rotacionalmente invariante, es decir que no cambia de forma ante una rotación cualquiera.

   (b) Se envia cada una de las partículas a un laboratorio diferente A y B donde se mide el spin en direcciones arbitrarias. Llamamos $C(\mathbf{n_A}, \mathbf{n_B})$ al valor medio de la correlación de dichas mediciones respecto de los ejes $\mathbf{n_A}$ y $\mathbf{n_B}$. Suponiendo localidad y realismo Clauser, Horne, Shimony y Holt mostraron que

$$
|C(\mathbf{n_A}, \mathbf{n_B}) - \mathbf{C}(\mathbf{n_A}, \mathbf{n_B}^{'}) + \mathbf{C}(\mathbf{n_A}^{'}, \mathbf{n_B}) + \mathbf{C}(\mathbf{n_A}^{'}, \mathbf{n_B}^{'})| \leq \mathbf{2}
$$

   Usando el resultado del problema 3.b, encuentre direcciones $\mathbf{n_A}$, $\mathbf{n_B}$, $\mathbf{n_A}^{'}$ y $\mathbf{n_B}^{'}$ donde se muestre que la mecánica cuántica viola el resultado de CHSH.

6. Considere un sistema compuesto por tres partes, cada una de las cuales tiene un espacio de estados de dimensión 2 como en el problema anterior.

   (a) Encuentre una base del espacio de estados compuesto formada por vectores producto. En particular, encuentre la base de estados comunes de los operadores $\sigma_z^A \otimes I^B \otimes I^C$, $I^A \otimes \sigma_z^B \otimes I^C$, y $I^A \otimes I^B \otimes \sigma_z^C$.

   (b) Encuentre la base de autoestados comunes de los siguientes operadores: $\sigma_x^A \otimes \sigma_x^B \otimes I^C$, $I^A \otimes \sigma_x^B \otimes \sigma_x^C$, y $\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B \otimes \sigma_z^C$. Para cada uno de estos estados, calcule las probabilidades para los resultados de la medición de un observable cualquiera, para la partícula A y para el subsistema formado por las partículas A y B.

7. Suponga que el sistema compuesto descripto en el problema 1 es sometido al siguiente protocolo:

   (a) Se prepara un estado inicial

$$
|\Psi\rangle_{AB} = |\Phi\rangle_{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|{+}{+}\rangle + |{-}{-}\rangle\right) \ .
$$

   (b) Los subsistemas A y B son separados y llevados a laboratorios distantes

   (c) En el laboratorio del subsistema A un físico aplica un campo magnético en alguna dirección y con duración e intensidad elegidas de modo tal que el operador de evolución temporal es alguno de los siguientes operadores según la dirección elegida del campo magnético: $U_x = \sigma_x$, $U_y = \sigma_y$, o $U_z = \sigma_z$.

   (d) El subsistema A es trasladado al laboratorio donde se encuentra el subsistema B.

   Encuentre cuál es el estado del sistema completo en cada caso. Discuta cuál podría ser la estrategia del físico del laboratorio A para enviar información en el subsistema B.

8. Vamos a trasmitir el estado de una partícula de un laboratorio A a otro B utilizando un par de partículas en el estado $|\Phi\rangle_+$. Suponga que el estado de la partícula en laboratorio A es

$$|\Psi\rangle_1 = (\alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle) \ .$$

Generamos ahora un par de partículas en el estado $|\Phi\rangle_+$ y enviamos una de ellas al laboratorio A y la otra al laboratorio B.

(a) ¿Cual es el estado del sistema en la base desacoplada?.

(b) Escriba nuevamente el estado del sistema pero ahora describa el estado de las partículas en el laboratorio A usando la base Bell (Ejercicio 4).

(c) Mida los observables correspondientes al COCC M del ejecicio 3 (b) en el laboratorio A. ¿Cual es el estado del sistema luego de la medición?.

(d) Describa que debemos realizar luego de la medición en A para que la partícula en laboratorio B este en el estado que inicialmente tenia la partícula en laboratorio A.

9. Esta paradoja, en la línea de EPR, fue propuesta por D. Mermin (ver *Am. J. Phys*, **58**, 731 [1990], o *Phys. Rev. Lett.*, **65**, 3373 [1990]). Considere un sistema de 3 partículas de espín $1/2$, en un estado $\psi = f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)(\mathsf{u}_1\mathsf{u}_2\mathsf{u}_3 - \mathsf{v}_1\mathsf{v}_2\mathsf{v}_3)$, con $\mathsf{u} = |s_z, +\rangle$, $\mathsf{v} = |s_z, -\rangle$, y donde $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ tiene una forma que asegura que las partículas están muy separadas espacialmente entre sí.

(a) Muestre que ψ es autoestado de los siguientes cuatro operadores

$$(\sigma_{1x}\,\sigma_{2y}\,\sigma_{3y})\psi = \psi \qquad (\sigma_{1y}\,\sigma_{2x}\,\sigma_{3y})\psi = \psi$$

$$(\sigma_{1y}\,\sigma_{2y}\,\sigma_{3x})\psi = \psi \qquad (\sigma_{1x}\,\sigma_{2x}\,\sigma_{3x})\psi = -\psi$$

(b) Verifique que los cuatro operadores conmutan entre sí, y que

$$(\sigma_{1x}\,\sigma_{2y}\,\sigma_{3y})(\sigma_{1y}\,\sigma_{2x}\,\sigma_{3y})(\sigma_{1y}\,\sigma_{2y}\,\sigma_{3x}) = -(\sigma_{1x}\,\sigma_{2x}\,\sigma_{3x})$$

(c) Se mide, simultáneamente sobre las tres partículas, su σ_x (o su σ_y) con resultado m_x (o m_y). Muestre que (*i*) si para las tres se mide σ_x , se obtendrá con certeza $m_{1x}\,m_{2x}\,m_{3x} = -1$; (*ii*) si en cambio se mide σ_x para una y σ_y para las otras dos, se obtendrá que el producto de las tres es la unidad: $m_{1x}\,m_{2y}\,m_{3y} = 1$, $m_{1y}\,m_{2x}\,m_{3y} = 1$, $m_{1y}\,m_{2y}\,m_{3x} = 1$.

(d) Discuta ahora el siguiente razonamiento: Las tres mediciones (c)-(*ii*) se pueden realizar consistentemente una tras otra sin importar el orden, pues los tres operadores conmutan. Multiplicando las tres mediciones sucesivas compatibles el resultado es $m_{1x}\,m_{2x}\,m_{3x} = 1$, en contradicción con el resultado predicho para la medición directa, (c)-(*i*).