Estados de dos partículas idénticas

El ket $|k_a\rangle|k_b\rangle = |k_a\, k_b\rangle$ en $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ representa

- $\rightarrow$ la partícula “1” en el detector A
- $\rightarrow$ la partícula “2” en el detector B

Si “1” y “2” son idénticas, $|k_a\, k_b\rangle$ y $|k_b\, k_a\rangle$ representan el mismo estado físico, no hay ninguna medición que los pueda diferenciar.

De hecho, cualquier c.l. representa el mismo estado: $c_1|k_a\, k_b\rangle + c_2|k_b\, k_a\rangle$

El espacio producto $\mathcal{H}$ es “demasiado grande” para describir estados de dos partículas idénticas (degeneración de intercambio).

Definamos el operador intercambio de partículas, $P_{12}|k_a\, k_b\rangle \equiv |k_b\, k_a\rangle$.

- $\rightarrow$ Claramente, $P_{12}^2 = 1$ ($\Rightarrow$ $P_{12}^{-1} = P_{12}$)
- $\rightarrow$ Hermítico: $P_{12}^\dagger = P_{12}$. Pues $\langle a\, b|P_{12}|c\, d\rangle = \langle a\, b\,|\,d\, c\rangle = \delta_{ad}\delta_{bc}$ real
- $\rightarrow$ Unitario: $P_{12}^\dagger = P_{12}^{-1}$. Pues $P_{12}^\dagger = P_{12}$ y $P_{12} = P_{12}^{-1}$

Físicamente el estado queda definido diciendo: hay *una* partícula en $|k_a\rangle$ y *una* en $|k_b\rangle$.

Ante el intercambio de partículas, el estado tendrá que ser el mismo:

$$P_{12}|\psi\rangle = \eta\,|\psi\rangle$$

Aplicando P_{12} de nuevo:

$$P_{12}^2|\psi\rangle = \eta^2\,|\psi\rangle. \quad \text{Como} \quad P_{12}^2 = 1 \;\Rightarrow\; \eta^2 = 1 \;\Rightarrow\; \eta = \pm 1 \quad \begin{array}{l}\text{bosones}\\ \text{fermiones}\end{array}$$

La elección de η rompe la degeneración de intercambio y asigna unívocamente un ket de $\mathcal{H}$ al estado de dos partículas idénticas:

$$|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|k_a\,k_b\rangle + |k_b\,k_a\rangle\big) \qquad P_{12}|\psi_S\rangle = +|\psi_S\rangle \qquad \text{(simétrico, bosones)}$$
$$|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|k_a\,k_b\rangle - |k_b\,k_a\rangle\big) \qquad P_{12}|\psi_A\rangle = -|\psi_A\rangle \qquad \text{(antisimétrico, fermiones)}$$

El proceso de scattering en términos de $|\psi_S\rangle$ o $|\psi_A\rangle$ (distinguidos con $\epsilon = \pm 1$):

$$\begin{aligned}
\langle f\,|U_T|\,i\,\rangle &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\langle k_a\,k_b| + \epsilon\,\langle k_b\,k_a|\big)\right] U_T \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|p_a\,p_b\rangle + \epsilon\,|p_b\,p_a\rangle\big)\right] \\
&= \tfrac{1}{2}\left[\underbrace{\langle k_a\,k_b|U_T|p_a\,p_b\rangle}_{f(\theta)} + \underbrace{\langle k_b\,k_a|U_T|p_b\,p_a\rangle}_{f(\theta)} + \epsilon\,\underbrace{\langle k_a\,k_b|U_T|p_b\,p_a\rangle}_{f(\pi-\theta)} + \epsilon\,\underbrace{\langle k_b\,k_a|U_T|p_a\,p_b\rangle}_{f(\pi-\theta)}\right] \\
&= f(\theta) + \epsilon\,f(\pi-\theta)
\end{aligned}$$

$$P(\theta) = \big|\,f(\theta) + \epsilon\,f(\pi-\theta)\,\big|^2$$

Descomposición de $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ en $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \oplus \mathcal{H}_A$

Definimos el simetrizador S y el antisimetrizador A:

$$S \equiv \frac{1}{2}(1 + P_{12}) \qquad S^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\,P_{12} + P_{12}^2) = \frac{1}{2}(1 + P_{12}) = S$$

$$A \equiv \frac{1}{2}(1 - P_{12}) \qquad A^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\,P_{12} + P_{12}^2) = \frac{1}{2}(1 - P_{12}) = A$$

$$S + A = 1 \qquad SA = \frac{1}{2}(1 + P_{12})\,\frac{1}{2}(1 - P_{12}) = \frac{1}{4}(1 + P_{12} - P_{12} - P_{12}^2) = 0$$

S y A son proyectores sobre subespacios disjuntos, $\mathcal{H}_S$ y $\mathcal{H}_A$, cuya suma es $\mathcal{H}$:

$$P_{12}\left[S|\psi\rangle\right] = \frac{1}{2}(P_{12} + P_{12}^2)\,|\psi\rangle = +\left[S\,|\psi\rangle\right] \qquad \Rightarrow \qquad S\,|\psi\rangle \text{ es un } |\psi_S\rangle$$

$$P_{12}\left[A|\psi\rangle\right] = \frac{1}{2}(P_{12} - P_{12}^2)\,|\psi\rangle = -\left[A\,|\psi\rangle\right] \qquad \Rightarrow \qquad A\,|\psi\rangle \text{ es un } |\psi_A\rangle$$

Un sistema de dos partículas idénticas está descrito por kets en $\mathcal{H}_S$ o en $\mathcal{H}_A$,

según sean bosones o fermiones.

Sea $|\psi\rangle$ un estado de dos partículas distinguibles con $\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \langle \boldsymbol{r}_1\, \boldsymbol{r}_2 | \psi \rangle$

Si las partículas son indistinguibles, la función de onda es $\psi_S(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ o $\psi_A(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$:

$$\psi_S(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \langle \boldsymbol{r}_1\, \boldsymbol{r}_2 | \psi_S \rangle = \langle \boldsymbol{r}_1\, \boldsymbol{r}_2 |\, S\, | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(\langle \boldsymbol{r}_1\, \boldsymbol{r}_2 | + \langle \boldsymbol{r}_2\, \boldsymbol{r}_1 | \big) | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) + \psi(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1) \right]$$

$$\psi_A(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \langle \boldsymbol{r}_1\, \boldsymbol{r}_2 | \psi_A \rangle = \langle \boldsymbol{r}_1\, \boldsymbol{r}_2 |\, A\, | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(\langle \boldsymbol{r}_1\, \boldsymbol{r}_2 | - \langle \boldsymbol{r}_2\, \boldsymbol{r}_1 | \big) | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) - \psi(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1) \right]$$

¿Cuál es la probabilidad de encontrar ambas partículas en la misma posición?

distinguibles: $P(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) = |\psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r})|^2$

bosones: $P(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) = 2\, |\psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r})|^2$

fermiones: $P(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) = 0$

Tres (o más) partículas idénticas

Si $\{|i\rangle\}$ es una base de $\mathcal{H}_1$, para 3 partículas distinguibles una base de $\mathcal{H}_3$ es $\{|i\,j\,k\rangle\}$.

Definimos operadores intercambio: P_{12}, P_{13}, P_{23} $[n(n\text{-}1)/2]$. $P_{13}\,|a\,b\,c\rangle = |c\,b\,a\rangle$.

Para bosones (fermiones) pedimos $\forall ij$: $\quad P_{ij}|\psi_S\rangle = |\psi_S\rangle \quad (\,P_{ij}|\psi_A\rangle = -|\psi_A\rangle\,)$.

Definimos permutaciones P_{ijk} que reordenan las partículas $[n!]$. $P_{231}\,|a\,b\,c\rangle \equiv |c\,a\,b\rangle$

Las permutaciones se pueden poner como productos de intercambios de paridad fija:

$$\begin{aligned}
P_{123} &= 1 & \qquad P_{231} &= P_{12}P_{23} \\
P_{132} &= P_{23} & \qquad P_{312} &= P_{23}P_{12} = P_{13}P_{23} = P_{23}P_{13}P_{23}P_{13} \\
P_{213} &= P_{12} & \qquad P_{321} &= P_{13}
\end{aligned}$$

Las permutaciones se llaman “pares” o “impares” según el número de intercambios que requieran. Para $n = 3$, pares: P_{123}, P_{231}, P_{312}; impares: P_{132}, P_{213}, P_{321}.

Tres (o más) partículas idénticas

Definimos el simetrizador y el antisimetrizador

$$S \equiv \frac{1}{n!} \sum_{\alpha} P_\alpha \qquad\qquad A \equiv \frac{1}{n!} \sum_{\alpha} \epsilon_\alpha P_\alpha$$

donde ϵ_α es la paridad de P_α. Demostrar:

$$S^2 = S \qquad A^2 = A \qquad SA = 0 \qquad S + A < 1 \qquad P_\alpha S = S \qquad P_\alpha A = \epsilon_\alpha A$$

Esto demuestra que

$$S\,|\psi\rangle \in \mathcal{H}_S \qquad A\,|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \qquad \text{y} \qquad \mathcal{H}_S \oplus \mathcal{H}_A \;<\; \mathcal{H}_{12}$$