Resuelto del problema 3 del parcial

Considere un oscilador armónico unidimensional. Considere el siguiente operador unitario de *contracción* (del inglés *squeezing operator*) dependiente de un parámetro r:

$$\hat{S}(r) = e^{\frac{1}{2}r\left(\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\right)}.$$

Dado un operador $\hat{A}$, $\hat{S}(r)$ define la transformación unitaria $\hat{S}(r)\hat{A}\hat{S}(r)^\dagger$.

1. Considerando que el parámetro de la transformación es real ($\hat{S}(r)$ con $r \in \mathbb{R}$), demuestre que la acción de esta transformación sobre $\hat{X}$ es la multiplicación por un parámetro λ_x, y sobre $\hat{P}$ por un parámetro λ_p. Es decir, $\hat{S}(r)\hat{X}\hat{S}^\dagger(r) = \lambda_x\hat{X}$, y $\hat{S}(r)\hat{P}\hat{S}^\dagger(r) = \lambda_p\hat{P}$. ¿Cúal es la relación entre los parámetros λ_x y λ_p? ¿Cómo se expresan estas dos escalas en términos del parámetro r?

2. Considere un estado *coherente* $|\alpha\rangle$. Recuerde que un estado coherente es aquel que es autoestado del operador de destrucción $\hat{a}$, y que realiza la relación de incerteza mínima ($\Delta_\alpha\hat{X}\,\Delta_\alpha\hat{P} = \hbar/2$). Definiendo un nuevo vector a partir de un coherente como $|\alpha, r\rangle \equiv \hat{S}(r)|\alpha\rangle$ con r real, muestre que este nuevo estado sigue realizando la relación de incerteza mínima.

3. Sin embargo, el estado $|\alpha, r\rangle$ no es uno coherente, ya que no es autoestado de $\hat{a}$. Partiendo de la ecuación $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, muestre que $|\alpha, r\rangle$ es autoestado del operador $\hat{S}^\dagger(-r)\hat{a}\hat{S}(-r)$ con autovalor α. *Ayuda*: Muestre (y aproveche) la relación $\hat{S}(-r)\hat{S}(r) = \hat{I}$.

4. Reescriba el inciso anterior en términos de $\hat{X}$ y $\hat{P}$, mostrando que $|\alpha, r\rangle$ es autoestado del siguiente operador $\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{X} + \frac{if^2(r)}{m\omega}\hat{P}\right)$. Encuentre el correspondiente autovalor. Esta ecuación de autovalores se reduce en el caso $r = 0$ a la ecuación de un estado coherente. *Fórmulas útiles:*

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{X} + \frac{i}{m\omega}\hat{P}\right), \quad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{X} - \frac{i}{m\omega}\hat{P}\right), \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \left[\hat{A},\hat{B}\right] + \frac{1}{2!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] + \frac{1}{3!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]\right] + \ldots$$

Resolución

A partir del operador $\hat{S}(r)$, escribamos

$$\hat{S}(r) = e^{r\hat{W}} \tag{1}$$

es decir, esta relación define el operador

$$\hat{W} = \frac{1}{2}\left((\hat{a})^2 - (\hat{a}^\dagger)^2\right) \tag{2}$$

Ahora podemos convencernos de dos propiedades del operador $\hat{S}$. Como $\hat{W}^\dagger = \frac{1}{2}\left((\hat{a}^\dagger)^2 - (\hat{a})^2\right) = -\hat{W}$, entonces de tomar el hermítico de $\hat{S}$ (recordemos, r es real, entonces $r^* = r$)

$$\hat{S}(r)^\dagger = e^{r^*\hat{W}^\dagger} = e^{-r\hat{W}} = (\hat{S}(r))^{-1} = \hat{S}(-r) \tag{3}$$

Es decir, la transformación es unitaria, y además, la transformación con $-r$ es asimismo el inverso de la transformación con r. Esto resulta similar a lo que ocurría con los operadores de traslación: una traslación en una cantidad $-l$ es la inversa de la traslación en la cantidad l. Sin embargo, veremos que esta transformación no es una traslación, sino que tiene más sentido llamarla de *squeezing*, o compresión.

Para esto se nos pide que calculemos las cantidades $\hat{S}\hat{X}\hat{S}^{\dagger}$, y $\hat{S}\hat{P}\hat{S}^{\dagger}$. Esto se llama la acción de la transformación sobre el operador. ¿Por qué? Supongamos que tenemos un sistema en un estado arbitrario, $|\psi\rangle$. Ahora, definimos un nuevo estado que se obtiene a través de una transformación unitaria sobre este estado, es decir sea $|\phi\rangle \equiv S^{\dagger}|\psi\rangle$. Ahora bien, qué ocurre si uno tenía un observable, $\hat{O}$, y estaba interesado en su valor de expectación en el estado $|\psi\rangle$: entonces ese valor de expectación se expresaría

$$\langle\hat{O}\rangle_{|\psi\rangle} = \langle\psi|\,\hat{O}\,|\psi\rangle \tag{4}$$

Sin embargo, ahora supongamos que transformamos el estado del sistema. Es decir, ahora el estado del sistema es $|\phi\rangle$. Entonces este nuevo valor de expectación es

$$\langle\hat{O}\rangle_{|\phi\rangle} = \langle\phi|\,\hat{O}\,|\phi\rangle = \langle\psi|\,\hat{S}\hat{O}\hat{S}^{\dagger}\,|\psi\rangle \tag{5}$$

que no es otra cosa que el valor de expectación, en el estado original del sistema, $|\psi\rangle$, de un operador transformado, $\hat{O}' = \hat{S}\hat{O}\hat{S}^{\dagger}$. Es decir, es lo mismo pensar que la transformación actúa de una manera sobre el estado del sistema, o que actúa de otra manera sobre los observables del sistema. *Esto debería resultar familiar. Recuerda esquemas de Heisenberg y de Schrödinger. La evolución temporal no es otra cosa que una transformación unitaria, parametrizada por el tiempo.*

Yendo al grano, interesa el cálculo de las cantidades $\hat{S}\hat{X}\hat{S}^{\dagger}$, y $\hat{S}\hat{P}\hat{S}^{\dagger}$. Para esto, se nos provee de una ayuda fundamental, esta es, la fórmula de *Baker, Campbell & Hausdorff.* Escribamos

$$e^{r\hat{W}}\hat{X}e^{-r\hat{W}} = \hat{X} + \left[r\hat{W},\hat{X}\right] + \frac{1}{2!}\left[r\hat{W},\left[r\hat{W},\hat{X}\right]\right] + \dots \tag{6}$$

$$e^{r\hat{W}}\hat{P}e^{-r\hat{W}} = \hat{P} + \left[r\hat{W},\hat{P}\right] + \frac{1}{2!}\left[r\hat{W},\left[r\hat{W},\hat{P}\right]\right] + \dots \tag{7}$$

Primero que nada veamos que en el término *n-ésimo*, el parámetro r factorizará como r^n. Lo que quedará serán n conmutadores anidados, $\left[\hat{W},\left[\hat{W},\dots\left[\hat{W},\hat{X}\right]\right]\dots\right]$. Pero empecemos por lo primero, que es evaluar los conmutadores $\left[\hat{W},\hat{X}\right]$ y $\left[\hat{W},\hat{P}\right]$. Acá hay dos caminos posibles, está quien prefiere expresar a $\hat{W}$ en términos de $\hat{X}$ y $\hat{P}$, o quien prefiere expresar a $\hat{X}$ y $\hat{P}$ en términos de operadores de creación y destrucción. Ambos caminos son totalmente equivalentes. Entre las ayudas se nos provee de la definición de $\hat{a}$ (y $\hat{a}^{\dagger}$). Sumando y restandolos, se obtienen

$$\hat{X} = C\left(a + a^{\dagger}\right) \tag{8}$$

y

$$\hat{P} = \widetilde{C}\left(a - a^{\dagger}\right) \tag{9}$$

con C y $\widetilde{C}$ dos constantes, que no molestan a la hora de calcular los conmutadores.

Calculemos el primero de los conmutadores, de $\hat{W}$ con $\hat{X}$:

$$\left[\hat{W},\hat{X}\right] = \frac{C}{2}\left[\left(\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2\right), \hat{a} + \hat{a}^\dagger\right] \tag{10}$$

Conviene antes de expresar el conmutador $[A,B] = AB - BA$, aprovechar al máximo las propiedades del álgebra de conmutadores ya conocidas. Principalmente, la linealidad

$$\left[\hat{W},\hat{X}\right] = \frac{C}{2}\left\{\left[\hat{a}^2,\hat{a}^\dagger\right] - \left[(\hat{a}^\dagger)^2,\hat{a}\right]\right\} \tag{11}$$

Y el hecho de que el conmutador $\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right] = 1$, conmuta tanto con $\hat{a}$ como con $\hat{a}^\dagger$. Esto permite escribir:

$$\left[\hat{W},\hat{X}\right] = \frac{C}{2}\left\{2\hat{a}\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right] - 2\hat{a}^\dagger\left[\hat{a}^\dagger,\hat{a}\right]\right\} = C\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right) = \hat{X} \tag{12}$$

El otro conmutador es idéntico a menos de un signo:

$$\left[\hat{W},\hat{P}\right] = -\hat{P} \tag{13}$$

Con esto, ya se puede volver a la fórmula de *BCH*. Vemos que un término general de la serie tiene la forma

$$\frac{r^n}{n!}\left[\hat{W},\left[\hat{W},\ldots\left[\hat{W},\hat{A}\right]\right]\ldots\right] \tag{14}$$

con la aplicación sucesiva de n conmutaciones anidadas de $\hat{W}$ a $\hat{A}$. En el caso de $\hat{X}$, cada una de estas conmutaciones devuelve el mismo $\hat{X}$, entonces la serie queda factorizada del operador, y resulta que es una serie conocida:

$$e^{r\hat{W}}\hat{X}e^{-r\hat{W}} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}\Big)\,\hat{X} = e^r\,\hat{X} \tag{15}$$

en el caso de $\hat{P}$, como el conmutador $\left[\hat{W},\hat{P}\right]$ es $-\hat{P}$, la aplicación sucesiva de n conmutaciones con $\hat{W}$ da $(-1)^n\hat{P}$. Entonces, nuevamente el operador factoriza de lo que es la serie, y se obtiene

$$e^{r\hat{W}}\hat{P}e^{-r\hat{W}} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n r^n}{n!}\Big)\,\hat{P} = e^{-r}\,\hat{P} \tag{16}$$

Acá estamos en condiciones de responder las dos primeras preguntas del problema. Cuáles son los factores de proporcionalidad, y qué relacion guardan entre ellos. Esto es $\lambda_x = e^r$, $\lambda_p = e^{-r}$, y la relación se refiere a que el producto de ambos es 1: $\lambda_x\lambda_p = 1$. Esta propiedad es de suma importancia, y se podía anticipar de la forma del conmutador entre $\hat{X}$ y $\hat{P}$. Consideremos

$$\left[\hat{X},\hat{P}\right] = i\hbar \tag{17}$$

Multipliquemos esta ecuación por $\hat{S}$ a izquierda y por $\hat{S}^\dagger$ a derecha:

$$\hat{S}\left[\hat{X},\hat{P}\right]\hat{S}^\dagger = i\hbar\hat{S}\hat{S}^\dagger \tag{18}$$

$$\hat{S}\hat{X}\hat{P}\hat{S}^\dagger - \hat{S}\hat{P}\hat{X}\hat{S}^\dagger = i\hbar \tag{19}$$

$$\hat{S}\hat{X}\mathbf{\hat{S}}^\dagger\mathbf{\hat{S}}\hat{P}\hat{S}^\dagger - \hat{S}\hat{P}\mathbf{\hat{S}}^\dagger\mathbf{\hat{S}}\hat{X}\hat{S}^\dagger = i\hbar \tag{20}$$

$$\left[\hat{S}\hat{X}\hat{S}^\dagger,\hat{S}\hat{P}\hat{S}^\dagger\right] = i\hbar \tag{21}$$

Y ahora, simplemente sabiendo que la acción de la transformación unitaria sobre los operadores es la multiplicación por un factor, se obtiene la relación entre ellos $\lambda_x \lambda_p = 1$.

Estamos en condiciones de comparar este operador, de contracción, con el operador traslación. La traslación, $\hat{\mathcal{T}}(l)$ es una transformación unitaria con la propiedad

$$\left[\hat{X}, \hat{\mathcal{T}}(l)\right] = l\,\hat{\mathcal{T}}(l) \tag{22}$$

Con esta propiedad, fácilmente se puede probar que su acción sobre el operador de traslación es, la de trasladarlo

$$\hat{\mathcal{T}}(l)\hat{X}\hat{\mathcal{T}}(l)^{\dagger} = \hat{X} - l \tag{23}$$

Mientras que al operador $\hat{P}$ no lo cambia, su acción es dejarlo invariante (esto es consecuencia de que el operador traslación es una función del operador $\hat{P}$).

$$\hat{\mathcal{T}}(l)\hat{P}\hat{\mathcal{T}}(l)^{\dagger} = \hat{P} \tag{24}$$

En cambio, con el operador del enunciado, lo que probamos es que su acción es cambiarle la escala a ambos operadores, pero de forma que el producto de estas escalas sea 1. Con esto se puede probar el inciso 2. Nos dicen que tenemos un estado que realiza el mínimo del producto de las incertezas, y nos piden ver que en un estado *squeezeado* se seguirá cumpliendo esto. Este inciso es consecuencia directa de lo probado en el 1, y basta con ver que

$$\hat{S}_r^{\dagger}\hat{X}\hat{S}_r = \hat{S}_{-r}\hat{X}\hat{S}_{-r}^{\dagger} = e^{-r}\,\hat{X} \tag{25}$$

(donde adoptamos la notación compacta $\hat{S}(r) \equiv \hat{S}_r$). Vemos que el factor está invertido respecto del inciso 1. Esto es porque corresponde a usar el resultado anterior, pero con el signo opuesto de r. Insertando una identidad se prueba también

$$\hat{S}_r^{\dagger}(\hat{X})^2\hat{S}_r = \hat{S}_{-r}\hat{X}\hat{\mathbf{S}}_{-\mathbf{r}}^{\dagger}\hat{\mathbf{S}}_{-\mathbf{r}}\hat{X}\hat{S}_{-r}^{\dagger} = e^{-2r}\,\hat{X}^2 \tag{26}$$

De forma completamente análoga se prueba que

$$\hat{S}_r^{\dagger}\hat{P}\hat{S}_r = e^{r}\,\hat{P} \tag{27}$$

y

$$\hat{S}_r^{\dagger}(\hat{P})^2\hat{S}_r = e^{2r}\,\hat{P}^2 \tag{28}$$

Así se puede ver que de tomar la dispersión en x

$$\sigma_x = \sqrt{\langle\psi| X^2 |\psi\rangle - \langle\psi| X |\psi\rangle^2} \tag{29}$$

si se transforma el estado $|\psi\rangle \to \hat{S}_r |\psi\rangle$, la dispersión en x cambia en

$$\widetilde{\sigma}_x = e^{-r}\sigma_x \tag{30}$$

mientras que en p, la dispersión cambia de forma inversa

$$\widetilde{\sigma}_p = e^r \sigma_p \tag{31}$$

y el producto de ambas $\sigma_x \sigma_p$, al transformar el estado mediante una compresión, no cambiará. Entonces, si el estado original era un estado coherente, $|\alpha\rangle$, el estado transformado $\hat{S}_r |\alpha\rangle$ también tendrá el producto de sus incertezas mínimo. ¿Esto significa que el nuevo estado es coherente? Veremos que la respuesta a eso es que no. El estado coherente lo podemos definir a través de la ecuación

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \tag{32}$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$. Multiplicando esta ecuación por $\hat{S}_r$, y con la inserción de una identidad entre operador y estado,

$$\hat{S}_r \hat{a} \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{r}}^{\dagger} \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{r}} |\alpha\rangle = \alpha \hat{S}_r |\alpha\rangle \tag{33}$$

$$\hat{S}_r \hat{a} \hat{S}_r^{\dagger} |\alpha, r\rangle = \alpha |\alpha, r\rangle \tag{34}$$

que es lo que se pedía en el inciso 3. Ahora, escribiendo el operador de destrucción en términos de $\hat{X}$ y $\hat{P}$, podremos usar lo obtenido en el primer inciso. Esto es,

$$\hat{S}_r \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{X} + \frac{i}{m\omega} \hat{P} \right) \hat{S}_r^{\dagger} |\alpha, r\rangle = \alpha |\alpha, r\rangle \tag{35}$$

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{S}_r \hat{X} \hat{S}_r^{\dagger} + \frac{i}{m\omega} \hat{S}_r \hat{P} \hat{S}_r^{\dagger} \right) |\alpha, r\rangle = \alpha |\alpha, r\rangle \tag{36}$$

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(e^r \hat{X} + \frac{i}{m\omega} e^{-r} \hat{P} \right) |\alpha, r\rangle = \alpha |\alpha, r\rangle \tag{37}$$

y multiplicando por e^{-r} se llega a lo pedido,

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{X} + \frac{i}{m\omega} (e^{-r})^2 \hat{P} \right) |\alpha, r\rangle = e^{-r} \alpha |\alpha, r\rangle \tag{38}$$

de donde se puede identificar, $f(r) = e^{-r}$, y el autovalor correspondiente es $e^{-r}\alpha$. Esta ecuación se reduce efectivamente a la de un coherente en el caso $r = 0$, ya que si $r = 0$, la transformación $\hat{S}_0 = \hat{1}$ es la unidad, y el estado es el original.

De esta última ecuación se puede ver que su solución en el espacio de coordenadas, es decir, la función de onda $\langle x|\alpha, r\rangle \equiv \psi_{\alpha,r}(x)$ es una gaussiana. Su ancho está dado por

$$f(r) \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = e^{-r} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \tag{39}$$

Lo interesante es entonces, que a través de un *squeezing*, se puede obtener un estado que reduce la dispersión en x aún más que un estado coherente, manteniendo el producto de incertezas en mínimo. Estos estados son usados en óptica cuántica, a modo de reducir el ruido de determinadas mediciones.