Resolución del ejercicio 3

El inciso 1 nos pide calcular $\hat{S}\hat{X}\hat{S}^\dagger$, y $\hat{S}\hat{P}\hat{S}^\dagger$. Para esto se nos provee de una ayuda fundamental: una aplicación de la fórmula de *Baker, Campbell & Hausdorff*. Escribamos

$$\hat{W} = \frac{1}{2}\left(\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\right) \quad \Rightarrow \quad \hat{S}(r) = e^{r\hat{W}}.$$

Entonces,

$$e^{r\hat{W}}\hat{X}e^{-r\hat{W}} = \hat{X} + \left[r\hat{W},\hat{X}\right] + \frac{1}{2!}\left[r\hat{W},\left[r\hat{W},\hat{X}\right]\right] + \dots$$
$$e^{r\hat{W}}\hat{P}e^{-r\hat{W}} = \hat{P} + \left[r\hat{W},\hat{P}\right] + \frac{1}{2!}\left[r\hat{W},\left[r\hat{W},\hat{P}\right]\right] + \dots$$

Utilizando las definiciones de $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$, escribimos a $\hat{X}$ y $\hat{P}$ como

$$\hat{X} = C\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right) \quad \text{y} \quad \hat{P} = \widetilde{C}\left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger\right),$$

donde C y $\widetilde{C}$ son constantes que no interesan a la hora de hacer las cuentas y calculamos $\left[\hat{W},\hat{X}\right]$ y $\left[\hat{W},\hat{P}\right]$:

$$\left[\hat{W},\hat{X}\right] = \frac{C}{2}\left[\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger, \hat{a} + \hat{a}^\dagger\right] = \frac{C}{2}\left\{\left[\hat{a}\hat{a},\hat{a}^\dagger\right] - \left[\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger,\hat{a}\right]\right\}$$
$$= \frac{C}{2}\left\{2\hat{a}\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right] - 2\hat{a}^\dagger\left[\hat{a}^\dagger,\hat{a}\right]\right\} = C\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right) = \hat{X},$$

donde usamos $\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right] = \mathbb{1}$. El otro conmutador es idéntico a menos de un signo:

$$\left[\hat{W},\hat{P}\right] = -\hat{P}.$$

Es claro que el término n-ésimo de la fórmula de BKH tendrá la forma

$$\frac{r^n}{n!}\left[\hat{W},\left[\hat{W},\dots\left[\hat{W},\hat{A}\right]\right]\dots\right],$$

donde $\hat{A}$ será $\hat{X}$ o $\hat{P}$. En el caso de $\hat{X}$, cada uno de estos conmutadores devuelve el mismo $\hat{X}$, entonces la serie queda factorizada del operador:

$$e^{r\hat{W}}\hat{X}e^{-r\hat{W}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}\right)\hat{X} = e^r\,\hat{X}.$$

En el caso de $\hat{P}$, el término n-ésimo devuelve $(-1)^n\,\hat{P}$. Por lo tanto,

$$e^{r\hat{W}}\hat{P}e^{-r\hat{W}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n r^n}{n!}\right)\hat{P} = e^{-r}\,\hat{P}.$$

Finalmente, $\lambda_x = e^r$, $\lambda_p = e^{-r}$, y $\lambda_x\lambda_p = 1$.

Para el inciso 2 basta ver que $\hat{S}^\dagger(r) = \hat{S}(-r)$ Luego,

$$\hat{S}^\dagger(r)\hat{X}\hat{S}(r) = \hat{S}(-r)\hat{X}\hat{S}^\dagger(-r) = e^{-r}\,\hat{X}$$

y, utilizando adicionalmente que $\hat{S}^\dagger \hat{S} = \hat{S}\hat{S}^\dagger = \mathbb{1}$,

$$\hat{S}^\dagger(r)(\hat{X})^2\hat{S}(r) = \hat{S}(-r)\hat{X}\hat{\mathbf{S}}^\dagger(-\mathbf{r})\hat{\mathbf{S}}(-\mathbf{r})\hat{X}\hat{S}^\dagger(-r) = e^{-2r}\,\hat{X}^2$$

y análogamente para $\hat{P}$. Luego,

$$\Delta_{\alpha,r}\hat{X} = \sqrt{\langle\alpha,r|\hat{X}^2|\alpha,r\rangle - \langle\alpha,r|\hat{X}|\alpha,r\rangle^2}$$
$$= \sqrt{\langle\alpha|\hat{S}^\dagger\hat{X}^2\hat{S}(r)|\alpha\rangle - \langle\alpha|\hat{S}^\dagger\hat{X}\hat{S}(r)|\alpha\rangle^2} = e^{-r}\,\Delta_\alpha\hat{X}$$

y para $\hat{P}$,

$$\Delta_{\alpha,r}\hat{P} = e^{r}\,\Delta_\alpha\hat{P}.$$

Por lo tanto,

$$\Delta_{\alpha,r}\hat{X}\,\Delta_{\alpha,r}\hat{P} = e^{-r}e^{r}\,\Delta_\alpha\hat{X}\,\Delta_\alpha\hat{P} = \Delta_\alpha\hat{X}\,\Delta_\alpha\hat{P} = \frac{\hbar}{2}.$$

El inciso 3 se resuelve partiendo de la ecuación que define un estado coherente:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

Multiplicando a izquierda por $\hat{S}(r)$ e insertando una identidad entre operador y estado,

$$\hat{S}(r)\hat{a}\hat{\mathbf{S}}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{r})|\alpha\rangle = \alpha\hat{S}(r)|\alpha\rangle,$$

llegamos a que $|\alpha,r\rangle = \hat{S}(r)|\alpha\rangle$ es autoestado de $\hat{S}(r)\hat{a}\hat{S}^\dagger(r)$ con autovalor α:

$$\hat{S}(r)\hat{a}\hat{S}^\dagger(r)|\alpha,r\rangle = \alpha|\alpha,r\rangle.$$

Finalmente, en el inciso 4 reescribimos $\hat{a}$ en la ecuación anterior en términos de $\hat{X}$ y $\hat{P}$ y operamos:

$$\hat{S}(r)\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{X} + \frac{i}{m\omega}\hat{P}\right)\hat{S}^\dagger(r)|\alpha,r\rangle = \alpha|\alpha,r\rangle,$$
$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{S}(r)\hat{X}\hat{S}^\dagger(r) + \frac{i}{m\omega}\hat{S}(r)\hat{P}\hat{S}^\dagger(r)\right)|\alpha,r\rangle = \alpha|\alpha,r\rangle,$$
$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(e^{r}\hat{X} + \frac{i}{m\omega}e^{-r}\hat{P}\right)|\alpha,r\rangle = \alpha|\alpha,r\rangle,$$
$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{X} + \frac{i}{m\omega}\left(e^{-r}\right)^2\hat{P}\right)|\alpha,r\rangle = \alpha\,e^{-r}|\alpha,r\rangle.$$

Por lo tanto, vemos que $f(r) = e^{-r}$ y el autovalor es $\alpha f(r)$.