P2. (*2.75 pts.*) Se tiene estados de momento angular orbital definido ℓ, y de spin 1/2. Empleando un ejercicio de la guía de Formalismo, se probó que se pueden definir los operadores de proyección $P_\pm$ sobre los subespacios con momento angular total definido $j_\pm = \ell \pm \frac{1}{2}$ $\quad$ ($\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$):

$$P_+ = \frac{\hat{J}^2/\hbar^2 - j_-(j_- + 1)}{j_+(j_+ + 1) - j_-(j_- + 1)}, \qquad P_- = \frac{\hat{J}^2/\hbar^2 - j_+(j_+ + 1)}{j_-(j_- + 1) - j_+(j_+ + 1)}$$

1. Verifique que estos operadores son proyectores sobre los subespacios de momento angular total $j_\pm = \ell \pm \frac{1}{2}$. Esto es, aplique $P_\pm$ sobre un estado $|\Psi\rangle = \alpha_+ |j_+; \ell, s = 1/2\rangle + \alpha_- |j_-; \ell, s = 1/2\rangle$ y vea que se obtiene la parte correspondiente de la función de onda.

2. Probar que estos operadores de proyección se pueden expresar para estados de momento angular orbital definido ℓ, y de spin 1/2 como :

$$P_+ = \frac{\ell + 1 + 2\,\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}/\hbar^2}{2\ell + 1}, \qquad P_- = \frac{\ell - 2\,\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}/\hbar^2}{2\ell + 1}$$

3. Dado que estos proyectores conmutan con J_z, entonces la aplicación de $P_\pm$ no cambia la proyección de J_z. Por consiguiente : $|j = \ell + 1/2, m_j = m_\ell + m_s; \ell, s = 1/2\rangle \sim P_+ |\ell, s = 1/2; m_\ell, m_s\rangle$. Obtenga de esta manera el estado: $|j = 3/2, m_j = -1/2; \ell = 1, s = 1/2\rangle \sim P_+ |\ell = 1, s = 1/2; m_\ell = -1, m_s = 1/2\rangle$.

4. Suponga que el sistema se encuentra en un estado con $\ell = 7$, $m_\ell = 3$, y $m_s = -\frac{1}{2}$. Diga qué valores de momento angular total (j) se pueden medir, y con qué probabilidades.

   Ayuda: $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} = L_z S_z + \frac{1}{2}(L_+ S_- + L_- S_+)$

Resolución

a) Primero vemos que hace P_+ sobre $|j_+; \ell, s\rangle$ y $|j_-; \ell, s\rangle$

$$P_+ |j_+; \ell, s = 1/2\rangle = \frac{\hat{J}^2/\hbar^2 - j_-(j_- + 1)}{j_+(j_+ + 1) - j_-(j_- + 1)} |j_+; \ell, s = 1/2\rangle \tag{1}$$

$$= \frac{j_+(j_+ + 1) - j_-(j_- + 1)}{j_+(j_+ + 1) - j_-(j_- + 1)} |j_+; \ell, s = 1/2\rangle = |j_+; \ell, s = 1/2\rangle \tag{2}$$

mientras que,

$$P_+ |j_-; \ell, s = 1/2\rangle = \frac{\hat{J}^2/\hbar^2 - j_-(j_- + 1)}{j_+(j_+ + 1) - j_-(j_- + 1)} |j_-; \ell, s = 1/2\rangle \tag{3}$$

$$= \frac{j_-(j_- + 1) - j_-(j_- + 1)}{j_+(j_+ + 1) - j_-(j_- + 1)} |j_-; \ell, s = 1/2\rangle = 0 \tag{4}$$

Análogamente el operador P_- anula el estado $|j_+; \ell, s\rangle$ y deja invariante al estado $|j_-; \ell, s\rangle$.

b) Acá escribimos $J^2 = L^2 + S^2 + 2\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$, y como estamos en un espacio con ℓ definido y s definido, reemplazamos los operadores L^2 y S^2 por $\hbar^2\ell(\ell + 1)$ y $\hbar^2 s(s + 1)$ respectivamente, donde además $s = \frac{1}{2}$. Entonces $J^2/\hbar^2 = \ell(\ell + 1) + \frac{3}{4} + 2\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}/\hbar^2$. Finalmente en los denominadores reemplazamos $j_+ = \ell + \frac{1}{2}$ y $j_- = \ell - \frac{1}{2}$. De esta forma se llega a las expresiones que se piden.

c) Como los proyectores proyectan un estado con ℓ definido y $s = \frac{1}{2}$ en los subespacios con $j = \ell + \frac{1}{2}$ y $j = \ell - \frac{1}{2}$, lo que nos piden es que hagamos $P_+ |\ell = 1, s = 1/2; m_\ell = -1, m_s = 1/2\rangle$, lo que será proporcional a $\left|j = \frac{3}{2}, m_j = -\frac{1}{2}\right\rangle$. Para hacer esto, recurrimos a la ayuda, y escribimos al proyector como:

$$P_+ = \frac{\ell + 1 + (2L_zS_z + L_+S_- + L_-S_+)/\hbar^2}{2\ell + 1} \tag{5}$$

donde además, $\ell = 1$. Ahora resta aplicarlo al estado, notando que

$$L_zS_z |\ell = 1, s = 1/2; m_\ell = -1, m_s = 1/2\rangle = \hbar^2(-1)(\frac{1}{2}) |\ell = 1, s = 1/2; m_\ell = -1, m_s = 1/2\rangle \tag{6}$$

$$L_+S_- |\ell = 1, s = 1/2; m_\ell = -1, m_s = 1/2\rangle = \hbar^2\sqrt{2} |\ell = 1, s = 1/2; m_\ell = 0, m_s = -1/2\rangle \tag{7}$$

$$L_-S_+ |\ell = 1, s = 1/2; m_\ell = -1, m_s = 1/2\rangle = 0 \tag{8}$$

Entonces

$$P_+ |\ell = 1, s = 1/2; m_\ell = -1, m_s = 1/2\rangle = \frac{1}{3}\Big(|m_\ell = -1, m_s = 1/2\rangle + \sqrt{2}\,|m_\ell = 0, m_s = -1/2\rangle\Big) \tag{9}$$

que, si uno considera normalizarlo, se obtiene exactamente el estado $\left|J = \frac{3}{2}, M = -\frac{1}{2}, \ell = 1, s = 1/2\right\rangle$, que se puede ver de la tabla de CG, en el recuadro $1 \times \frac{1}{2}$. Es decir, los coeficientes $\sqrt{\frac{1}{3}}$ y $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

d) Finalmente, nos pide, dado el estado con $\ell = 7$, $m_\ell = 3$, $s = \frac{1}{2}$ y $m_s = -\frac{1}{2}$, qué valores de J se pueden medir, y con que probabilidad.

Los valores que se pueden medir son $j_+ = 7 + \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$ y $j_- = 7 - \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$. Esta vez, la tabla de CG no podrá ayudarnos, porque no llega a $7 \times \frac{1}{2}$.

Las probabilidades son los valores medios de los dos proyectores. Para calcularlos, nuevamente recurrimos a escribir el operador $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ en términos de operadores L_z, S_z, y operadores escalera. El tema es que cuando calculemos este valor medio, los operadores escalera nos darán elementos nulos, por ortogonalidad de los estados $|m_\ell, m_s\rangle$ con $|m_\ell + 1, m_s - 1\rangle$, etc. Entonces, se encuentra que

$$\text{Prob}\left(J = \frac{15}{2}\right) = \left\langle \ell = 7, m_\ell = 3, s = \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\right| P_+ \left|\ell = 7, m_\ell = 3, s = \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\right\rangle \tag{10}$$

$$= \left\langle \frac{1}{15}\left(7 + 1 + 2L_zS_z/\hbar^2\right)\right\rangle_{|\psi\rangle} \tag{11}$$

$$= \frac{7 + 1 + 2 \times 3 \times (-\frac{1}{2})}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \tag{12}$$

por lo que la otra probabilidad, al ser complementaria, valdrá $\frac{2}{3}$. Se puede calcular análogamente como el valor medio de P_-.