Física Teórica 2 (2016 - 1C)

Segundo Parcial

P1. (*2.0 pts.*) La parte angular de la función de onda de un rotor rígido con un Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{1}{2I}\hat{L}^2$$

está dada por

$$\langle \theta, \phi | \psi(0) \rangle = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\sin(\theta)\sin(\phi).$$

a) Halle $\langle \theta, \phi | \psi(t) \rangle$. *Sugerencia:* utilice los armónicos esféricos.

b) ¿Cuál es el valor de $\langle \hat{L}_y \rangle$?

c) Si se mide $\hat{L}_x$ al tiempo $t = 0$, ¿Qué resultados pueden obtenerse y con qué probabilidad? *Ayuda.* Puede ser útil usar la matriz de rotaciones alrededor del eje y que está en la tabla de CG.

P2. (*2.75 pts.*) Se tiene estados de momento angular orbital definido ℓ, y de spin 1/2. Recordando un ejercicio de la guía de Formalismo, se pueden definir los operadores de proyección $P_\pm$ sobre los subespacios con momento angular total definido $j_\pm = \ell \pm \frac{1}{2}$ $\quad$ ($\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$):

$$P_+ = \frac{\hat{J}^2/\hbar^2 - j_-(j_- + 1)}{j_+(j_+ + 1) - j_-(j_- + 1)}, \qquad P_- = \frac{\hat{J}^2/\hbar^2 - j_+(j_+ + 1)}{j_-(j_- + 1) - j_+(j_+ + 1)}$$

a) Verifique que estos operadores son proyectores sobre los subespacios de momento angular total $j_\pm = \ell \pm \frac{1}{2}$. Esto es, aplique $P_\pm$ sobre un estado $|\Psi\rangle = \alpha_+ |j_+; \ell, s = 1/2\rangle + \alpha_- |j_-; \ell, s = 1/2\rangle$ y vea que se obtiene la parte correspondiente de la función de onda.

b) Probar que estos operadores de proyección se pueden expresar para estados de momento angular orbital definido ℓ, y de spin 1/2 como :

$$P_+ = \frac{\ell + 1 + 2\,\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}/\hbar^2}{2\ell + 1}, \qquad P_- = \frac{\ell - 2\,\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}/\hbar^2}{2\ell + 1}$$

c) Dado que estos proyectores conmutan con J_z, entonces la aplicación de $P_\pm$ no cambia la proyección de J_z. Por consiguiente : $|j = \ell + 1/2, m_j = m_\ell + m_s; \ell, s = 1/2\rangle \sim P_+ |\ell, s = 1/2; m_\ell, m_s\rangle$. Obtenga de esta manera el estado: $|j = 3/2, m_j = -1/2; \ell = 1, s = 1/2\rangle \sim P_+ |\ell = 1, s = 1/2; m_\ell = -1, m_s = 1/2\rangle$.

d) Suponga que el sistema se encuentra en un estado con $\ell = 7$, $m_\ell = 3$, y $m_s = -\frac{1}{2}$. Diga qué valores de momento angular total (j) se pueden medir, y con qué probabilidades.

Ayuda: $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} = L_z S_z + \frac{1}{2}(L_+ S_- + L_- S_+)$

P3. (*2.75 pts.*) Considere un átomo de hidrógeno sujeto a un campo eléctrico de modo que la perturbación al Hamiltoniano está dada por $V = \lambda xz$.

a) Usando simetría de paridad diga qué elementos de matriz de la perturbación para el nivel $n = 2$: $< 2l'm'|V|2lm >$ son nulos.

b) Considerando los tensores irreducibles $T^{(2)}_{\pm 1} = \mp xz - iyz$, evalúe todos los elementos de matriz de la perturbación para el nivel $n = 2$ si se conoce el elemento de matriz $a =< 210|T^{(2)}_{-1}|211 >$. Use el Teorema de Wigner Eckart para relacionar los elementos de matriz no nulos.

c) Calcule las correcciones a la energía del nivel $n = 2$ a primer orden de perturbaciones. *Ayuda.* Puede ser útil tomar en cuenta que los autovalores de la matriz A son $1, 0$ y -1.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

P4. (*2.5 pts.*) Considere un sistema de 2 partículas de espín $\frac{1}{2}$ cuyo Hamiltoniano perturbado está dado por:

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{m\omega^2}{2}(1 + \delta x_1 x_2)(x_1^2 + x_2^2)$$

a) Para el caso $\delta = 0$, determine: i) los *dos* niveles más bajos de energía con sus respectivos autoestados y degeneraciones si las partículas son distinguibles; ii) los *tres* niveles más bajos de energía con sus respectivos autoestados y degeneraciones si las partículas son idénticas

b) Continuando con el caso cuando las partículas son idénticas y $\delta \neq 0$, diga cuál es la energía del estado fundamental, al primer orden de las teoría de perturbaciones.

c) Considere el segundo nivel de energía. Mediante teoría de perturbaciones evalúe las correcciones a primer orden en la energía y los estados a orden cero cuando $\delta \neq 0$. No haga cuentas de mas, justifique mediante argumentos de simetría qué elementos de matriz son cero. Deje expresado el resultado final en función de un sólo elemento de matriz (no hace falta que lo calcule).