Física Teórica 2

Segundo cuatrimestre de 2016
Guía complementaria 1: formalismo matemático

Nota/advertencia: Esta guía busca reforzar el manejo de la matemática de la materia: espacios de Hilbert y sus operadores, con enfoque hacia la mecánica cuántica no relativista. Persiguiendo ese objetivo, puede ser que haya ejercicios y observaciones que excedan el nivel usual (se aclaran algunos items excedidos en complejidad). Es una guía de matemática hecha por un físico. Ojalá sea de ayuda y desde ya se acepta todo tipo de sugerencias para mejorarla!... enviarlas a alan@df.uba.ar

Sugerencia: Se sugiere hacer los ejercicios hasta el 12 inclusive, y además el 19 y 24; también pensar los ejercicios del 13 al 15, y al menos leer un par de veces el resto. Vale resaltar aquellos de principal relevancia para entender cuestiones generales de mecánica cuántica: 1, 5, 9, 11, 12, 14, 15, 19, 20, 21, 22, 23 y 24. Los ejercicios 25 y 26 son dos ejercicios concretos de mecánica cuántica.

Notación y convención: Los elementos de los espacios de Hilbert (que son vectores) son llamados 'kets' y los de su dual 'bras'. El producto interno hermítico lo tomamos antilineal en el primer argumento:

$$(\alpha|u\rangle, \beta|v\rangle) = \bar{\alpha}\beta(|u\rangle, |v\rangle).$$

La norma es $|||u\rangle|| = \sqrt{(|u\rangle, |u\rangle)}$. El operador identidad se denota I.

Espacios de Hilbert y duales

1. *a*) Buscar la definición de espacio de Hilbert (o presenciar la primera clase de la práctica).

   b) Mostrar que el producto $(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i v_i$, donde $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, \ldots, v_n)$ son tiras de n números complejos, es hermítico. Por lo tanto concluya que $\mathbb{C}^n$ es un espacio de Hilbert [1].

   c) Mostrar que el espacio de funciones de cuadrado integrable en los reales, $L^2(\mathbb{R})$, con el producto

   $$(f, g) = \int_{\mathbb{R}} \bar{f} g$$

   es un espacio de Hilbert (otra vez, obvie el tema de la completitud del espacio). O sea, mostrar que el producto es un producto interno hermítico. Este ejemplo es de suma importancia para mecánica cuántica.

2. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, entonces su dual se denota $\mathcal{H}^*$ y está dado por las funcionales lineales continuas en $\mathcal{H}$, o sea

   $$\mathcal{H}^* = \{\langle a| : \mathcal{H} \to \mathbb{C}, \text{lineales y continuas}\}$$

   En castellano, los elementos $\langle a|$ del dual toman elementos de $\mathcal{H}$ y devuelven números complejos, respetando linealidad y continuidad (esto último es importante por cuestiones técnicas pero no lo usaremos explícitamente). Notación: dado un bra $\langle a|$ y un ket $|b\rangle$, se denota $\langle a|$ evaluado en $|b\rangle$ como un 'braket' $\langle a|b\rangle \in \mathbb{C}$. Muestre entonces (son casi inmediatas)

   a) $\langle a|(\alpha|u\rangle + \beta|v\rangle) = \alpha\langle a|u\rangle + \beta\langle a|v\rangle$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

[1] dejando de lado la demostración de la completitud del espacio frente a la norma $||u||^2 = (u, u)$ ya que siempre se puede completar un espacio normado. El punto es ver que ya es completo así como está...pero lo obviamos esto.

b) Se puede definir $(\alpha\langle a|)|b\rangle := \alpha\langle a|b\rangle$ y por lo tanto $\mathcal{H}^*$ es un espacio vectorial complejo.

Nota importante: $\mathcal{H} = \text{Ker}(\langle a|) \oplus \text{Ker}(\langle a|)^\perp, \quad \forall \langle a| \in \mathcal{H}^*$, donde $\text{Ker}(\langle a|) = \{|b\rangle \in \mathcal{H}; \langle a|b\rangle = 0\}$.

3. **Teorema de representación de Riezs**: el producto interno permite asociar de manera biyectiva a cada ket $|a\rangle$ un bra $\langle a|$ y viceversa, tal que

$$\langle a|b\rangle = (|a\rangle, |b\rangle) \quad \text{para todo} \quad |b\rangle \in \mathcal{H}.$$

Como excusa para ejercitar el manejo de bras y kets, vamos a realizar una serie de pasos para demostrar, usando la nota del ejercicio anterior, este teorema tan importante:

a) Dado $\langle a|$, mostrar que si $\text{Ker}(\langle a|) = \mathcal{H}$ entonces $|a\rangle = 0$.

b) Por lo anterior, de ahora en más asumimos que $\text{Ker}(\langle a|) \neq \mathcal{H}$. Probar que si $|b\rangle \in \text{Ker}(\langle a|)^\perp$ entonces $|c\rangle - \frac{\langle a|c\rangle}{\langle a|b\rangle}|b\rangle \in \text{Ker}(\langle a|) \cap \text{Ker}(\langle a|)^\perp$ para cualquier $|c\rangle \in \text{Ker}(\langle a|)^\perp$. Concluya, usando la nota del ejercicio 2, que $c = \frac{\langle a|c\rangle}{\langle a|b\rangle}|b\rangle$ y $|b\rangle$ genera todo $\text{Ker}(\langle a|)^\perp$.

c) Muestre que con el $|b\rangle$ del item anterior, ahora se puede definir $|a\rangle := \frac{\overline{\langle a|b\rangle}}{(b,b)}|b\rangle$ el cual satisface lo deseado:

$$\langle a|d\rangle = (|a\rangle, |d\rangle)$$

para todo $|d\rangle \in \mathcal{H}$.

d) Mostrar que el mapa $\langle a| \mapsto |a\rangle$ definido recién es biytectivo.

e) Notar, para terminar, que para el otro lado es simple: $|a\rangle \mapsto (|a\rangle,) \in \mathcal{H}^*$.

Nota (no tan importante): como corolario se puede demostrar que el dual del Hilbert también tiene estructura de espacio de Hilbert, y el teorema de Riesz nos señala un (anti)isomorfismo entre $\mathcal{H}$ y su dual $\mathcal{H}^*$ (esto quiere decir que la biyección que encontramos respeta el producto interno hermítico de ambos espacios).

4. Demostrar las siguiente relaciones usando lo que vimos en el ejercicio anterior:

a) $\alpha|a\rangle \mapsto \bar{\alpha}\langle a|$

b) $\alpha\langle a| \mapsto \bar{\alpha}|a\rangle$

5. Una sistema $N \subset \mathcal{H}$ se dice ortonormal si sus elementos son todos ortogonales ente sí y de norma uno. El sistema se dice que es una base (o base de Hilbert) si $N^\perp = \{0\}$. Se pide:

a) Mostrar que todo sistema ortonormal está formado de vectores linealmente independientes.

b) Se puede mostrar N es una base si solo si vale que todo $|a\rangle$ se descompone como

$$|a\rangle = \sum_{|b\rangle \in N} \langle b|a\rangle|b\rangle. \tag{1}$$

Mostrar que si N es base entonces vale que

1)
$$\langle a|b\rangle = \sum_{|c\rangle \in N} \langle a|c\rangle\langle c|b\rangle$$

2)
$$|||a\rangle||^2 = \sum_{|c\rangle \in N} |\langle a|c\rangle|^2$$

Nota: el subespacio generado por N, $< N >$, es denso en $\mathcal{H}$.

6. Considere $\mathcal{H} = L^2([-1,1])$, con el producto usual $(f,g) = \int_{-1}^{1} \bar{f} g dx$.

   a) Muestre que el sistema de funciones $f_n = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi n x}$ es ortonormal . Se puede ver también que es una base.

   b) Muestre que el sistema de funciones $g_n = x^n$ no es ortonormal. Cómo se construye una base ortonormal a partir de estos monomios?. Se puede ver que este sistema, por más que no sea ortonormal, genera un subespacio que es denso en $\mathcal{H}$.

7. **Ejemplos importantes (no es ejercicio)**: Considere $\mathcal{H} = L^2((a,b), dx)$, es decir las funciones de cuadrado integrable en el intervalo (a,b), donde a y/o b pueden ser $\pm\infty$.

   a) Si $a = -\infty$ y $b = \infty$: Las funciones $f_n = x^n e^{-x^2/2}$ generan un subespacio denso en $\mathcal{H}$. Por Graham-Schmidt se llega a una base ortonormal, las llamadas funciones de Hermite (modulo una normalización): $\psi_n = (2^n n! \sqrt{\pi})^{1/2} H_n e^{-x^2/2}$, donde H_n son los polinomios de Hermite $H_n = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$.

   b) Si $a = 0$ y $b = \infty$: de la misma manera que en el caso anterior, pero con $f_n = x^n e^{-x/2}$, se obtiene la base ortogonal de funciones $e^{-x} L_n$ donde $L_n = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$ son los polinomios de Laguerre.

8. **Resultado importante**: Un espacio de Hilbert se dice separable si su base tiene dimensión finita o es numerable. Entonces, todo espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ es isomorfo a $\mathbb{C}^n$ o a $\ell^2(\mathbb{N})$, donde n es la dimensión de $\mathcal{H}$ si fuere de dimensión finita. Recordar que $\ell^2(\mathbb{N})$ es el espacio vectorial de tiras infinitas $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números complejos tales que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 < \infty$ y el producto interno es $(a,b) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{a_n} b_n$.

Operadores acotados en espacios de Hilbert

Definición 1: Un operador lineal en un Hilbert $\mathcal{H}$ es un mapa lineal $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$.
Definición 2: Un operador lineal es continuo[2] si y solo si es acotado, por lo que nos quedamos con la definición de acotado: un operador lineal $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es acotado si $\exists K > 0$ tal que $||T|a\rangle|| \leq K|||a\rangle||$ para todo $|a\rangle$. La norma de T es $||T||$ =inf(K) que es equivalente a otras definiciones, como $||T|| :=$ sup$_{|||u\rangle||=1} ||T|u\rangle||$.
Definición 3: El adjunto de un operador acotado T se denomina $T^\dagger$ y es aquel tal que

$$(T^\dagger|a\rangle, |b\rangle) = (|a\rangle, T|b\rangle).$$

Se puede mostrar que siempre existe.
Definición 4: Un operador se dice auto-adjunto (o hermítico) si $T^\dagger = T$.

9. Dado un operador lineal T acotado:

   a) Mostrar que su adjunto es único

b) Mostrar que $(T^\dagger)^\dagger = T$.

c) Si S es otro operador acotado, mostrar entonces que $(\alpha T + \beta S)^\dagger = \bar{\alpha} T^\dagger + \bar{\beta} S^\dagger$ y que $(TS)^\dagger = S^\dagger T^\dagger$.

d) A T se lo llama **unitario** si $T^\dagger T = T T^\dagger = 1$. Mostrar que entonces es isométrico: vale $(T|a\rangle, T|b\rangle) = (|a\rangle, |b\rangle)$ para todo $|a\rangle$ y $|b\rangle$.

e) Buscar un ejemplo de operador isométrico que no es unitario (ayuda: considere $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$).

10. Dado un operador lineal $T : D(T) \to \mathcal{H}$ ($D(T)$ denso en H), mostrar que si $(|u\rangle, T|u\rangle) = 0$ para todo $|u\rangle \in D(T)$, entonces $T = 0$, es decir manda a cualquier ket al ket 0.

    Resultado: si T es acotado y definido en $D(T)$ (con $D(T)$ denso en $\mathcal{H}$), existe un único operador $\tilde{T}$ acotado definido en la clausura[3] de $D(T)$ (o sea en $\mathcal{H}$), tal que $\tilde{T}|_{D(T)} = T$. En otras palabras, se puede extender el dominio de T a $\mathcal{H}$.

11. Demostrar las siguientes afirmaciones sobre autovalores y autovectores de un operador lineal acotado T:

    a) Si $TT^\dagger = T^\dagger T$ (operador normal) entonces $||T|u\rangle|| = ||T^\dagger|u\rangle||$ para todo $|u\rangle$.

    b) Si $TT^\dagger = T^\dagger T$ y $|u\rangle$ es autovector de T con autovalor λ, entonces $\bar{\lambda}$ es autovalor de $T^\dagger$ con autoveector $|u\rangle$ (ayuda: considerar el operador $T - \lambda I$).

    c) Si $TT^\dagger = T^\dagger T$, las autovectores asociados a dos autovalores distintos de T son ortogonales.

12. Demostrar las siguientes afirmaciones sobre autovalores y autovectores de un operador lineal T:

    a) Si T es positivo ($T \geq 0$), o sea $(|u\rangle, T|u\rangle) \geq 0$ para todo $|u\rangle$, entonces los posibles autovalores de T son reales y no negativos.

    b) Si T es auto-adjunto entonces sus posibles autovalores son reales.

    c) Si T es isométrico entonces sus posibles autovalores tienen módulo 1.

    d) Si T es acotado y $(|u\rangle, T|u\rangle) = (T|u\rangle, |u\rangle)$ para todo $|u\rangle$ entonces T es auto-adjunto (ayuda: usar el ejercicio 10).

    e) Si T es acotado y positivo entonces es auto-adjunto

Definición 5: Un operador acotado P se dice que es un proyector si $PP = P$.

13. Mostrar que si P es proyector, entonces $Q := 1 - P$ es proyector y sucede que $QP = PQ = 0$. Además, si $M =$Im(P) y $N =$Im(Q) (o sea, $M = P(\mathcal{H})$) entonces $\mathcal{H} = N \oplus M$ (hay que mostrar que $M \cap N = \emptyset$).

14. Sea P un **proyector ortogonal**: además de $PP = P$ sucede que P es auto-adjunto.

    a) Mostrar que P es positivo.

    b) Mostrar que $Q := 1 - P$ es un proyector ortogonal

    c) Se puede ver que $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$, con $M = P(\mathcal{H})$. Probar esto (sugerencia: agarrar un libro de análisis funcional, obviamente es muy opcional).

[3]La clausura de un conjunto S es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a S.

Nota importante: Si N es una base de $M = P(\mathcal{H})$, entonces $P = \sum_{|u\rangle \in N} |u\rangle(|u\rangle,)$. También se puede escribir de la forma "física":

$$P = \sum_{|u\rangle \in N} |u\rangle\langle u|$$

Exponencial de operadores

15. Sea T un operador acotado y auto-adjunto. Para $\lambda \in \mathbb{C}$, se definen los operadores exponenciales,

$$U(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} T^n$$

   a) Mostrar que $U(\lambda)$ es acotado y además normal para todo λ
   b) Mostrar que $U(\lambda)U(\mu) = U(\lambda + \mu)$.
   c) Mostrar que $U(\lambda)$ es unitario si $\lambda \in \mathbb{R}$.

Operadores compactos

Definición 6: Un operador T de un Hilbert $\mathcal{H}$ se dice **compacto** sipara toda sucesión acotada $\{|u_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ existe una subsucesión $\{|u_{n_k}\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\{T|u_{n_k}\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathcal{H}$. Hay una definición equivalente: T es compacto si manda un subconjunto $M \subset \mathcal{H}$ acotado a un $T(M)$ tal qeu su clusura es compacto (se dice que $T(M)$ es relativamente compacto en ese caso).

Observación: Todo operador compacto es acotado.

16. Se suele llamar $\sigma_p(T)$ al conjunto de autovalores de un operador T. Si T es compacto y auto-adjunto mostrar entonces que

   a) (Para cebados) se puede descomponer T como $T = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \lambda P_\lambda$, con P_λ el proyector sobre el autoespacio asociado al autovalor λ.
   b) $\mathcal{H}$ admite una base de autovectores de T (ayuda: mostrar que si $|u\rangle$ es ortogonal a cualquier autovector, entonces también satisface $T|u\rangle = 0$, y por lo tanto $|u\rangle = 0$) .

17. Buscar la definición de operador de Hilbert-Schmidt y de "operador tipo traza" (también llamado operador de nucleo).

   Observación: Los tipo traza ($\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$) están dentro de los Hilbert-Schmidt ($\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$), que a su vez están dentro de los compactos ($\mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$), que a su vez están dentro de los acotados ($\mathcal{B}(\mathcal{H})$): $\mathcal{B}_1(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}_2(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$

18. La traza de un operador tipo traza T se define como $trT := \sum_{|u\rangle \in N} \langle u|T|u\rangle$, donde N es una base.

    a) Mostrar que la definición de traza no depende de la base escogida.

    b) Mostrar que $trT^\dagger = \overline{trT}$ y que la traza es lineal.

Resultado: Si A, B son ambos Hilbert-Schmidt o uno es tipo traza y el otro acotado, entonces vale que $tr(AB) = tr(BA)$, o sea la traza es cíclica. En general vale para el producto de varios operadores acotados cuando uno es tipo traza o dos de ellos son Hilbert-Schmidt.

Operadores no acotados: posición y momento

El punto relevante de los operadores no acotados es que generalmente no pueden ser definidos en todo el espacio de Hilbert (contrariamente a los acotados; ver **Resultado** luego de Ejercicio 10). Esto hace que se necesite más cuidado a la hora de definir y estudiar el correspondiente operador adjunto. Consideraremos operadores no acotados definidos en subespacios densos en el Hilbert.

Definición 7: Si T es un operador con dominio $D(T)$ denso en $\mathcal{H}$, el dominio del que será su adjunto, $D(T^\dagger)$, se define como

$$D(T^\dagger) := \{|u\rangle \in \mathcal{H}; \quad \exists \quad |z_{T,u}\rangle \in \mathcal{H} \text{ con } (|u\rangle, T|v\rangle) = (|z_{T,u}\rangle, |v\rangle), \forall |v\rangle \in D(T)\}\,.$$

El operador adjunto $T^\dagger$ se define entonces como $T^\dagger|u\rangle := |z_{T,x}\rangle$. De esta manera vale lo que uno busca: $(|u\rangle, T|v\rangle) = (T^\dagger|u\rangle, |v\rangle)$.

Nota: aunque $D(T)$ sea denso en $\mathcal{H}$, esto no garantiza que $D(T^\dagger)$ sea denso en $\mathcal{H}$, por lo que generalmente no existe el adjunto del adjunto $(T^\dagger)^\dagger$.

Definición 8: Ahora sí, podemos definir que un operador T (acotado o no) es auto-adjunto si $D(T)$ es denso y $T = T^\dagger$.

Resultado importante: Si un operador es auto-adjunto y su dominio es todo el Hilbert, entonces es necesariamente acotado.

Observción: Notar la ambigüedad que puede aparece en la notación de Dirac al tomar un elemento de matriz $\langle u|T|v\rangle = (|u\rangle, T|v\rangle)$ que también puede ser escrito como $(T^\dagger|u\rangle, |v\rangle)$, ya que en un caso es necesario $|v\rangle \in D(T)$ y en el otro $|u\rangle \in D(T^\dagger)$.

19. Suponga que X y P son operadores auto-adjuntos en cierto $\mathcal{H}$ y que satisfacen la regla de conmutación canónica $[X, P] = i\hbar I$.

    a) Muestre que no puede haber un espacio de Hilbert de dimensión finita donde operen X y P.

    b) Muestre que al menos uno de ellos no es acotado. Ayuda: suponga que son acotados ambos y tome la norma a la relación $[P, X^n] = -inX^{n-1}$, sabiendo que $||T^\dagger T|| = ||T||^2 = ||TT^\dagger||$.

20. El espacio de Hilbert típico asociado a una partícula es $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ (podriamos trabajar en n dimensiones de forma análoga, tomando $L^2(\mathbb{R}^n)$). El operador posición X se define usualmente como $Xf(x) = xf(x)$ y el operador momento P[4] como $Pf(x) = -i\hbar f'(x)$. Esta es la **representación en el espacio de coordendas**.

    a) La definición de estos operadores no es estrictamente completa si no se define sus repectivos dominios. Exprese los dominios más grandes posibles de cada uno.

    b) Encuentre un elemento en $\mathcal{H}$ que no esté en el dominio de X y otro que no esté en el dominio de P.

    c) Muestre que $[X, P] = i\hbar I$, definido en el dominio $D(XP) \cap D(PX)$. Es este dominio distinto que el dominio de los operadores X y P?

    d) Muestre de manera rudimentaria que X y P son auto-adjuntos.

    e) (Para cebados) Ahora muestre que X y P son **esencialmente auto-adjuntos** al restringirlos a un subespacio denso[5]. Esencialmente auto-adjunto quiere decir que $D(T)$ y $D(T^\dagger)$ son ambos densos y que $(T^\dagger)^\dagger = T^\dagger$ (el adjunto es auto-adjunto). Se puede ver que son autoadjuntos en todo su dominio, ya que hay un teorema que garantiza que operadores esencialmente auto-adjuntos tienen una única extensión y es auto-adjunta.

    Observación: note que $L^2(\mathbb{R})$ es el espacio de Hilbert asociado a una partícula, independientemente de cuál sea el operador Hamiltoniano que regule la dinámica del sistema. Por lo tanto los operadores X y P del ejercicio 20 serán utilizados a lo largo de la materia sin importar si estamos estudiando por ejemplo una partícula libre o un átomo de Hidrógeno.

21. Muestre que X y P, definidos como en el ejercicio 20, no tienen autovectores en $\mathcal{H}$.

    Nota: Existe un concepto de autovector generalizado en un espacio más grande que un Hilbert $\mathcal{H}$. Es usual encontrar el autoket $|x\rangle$ en libros de física, pero casi siempre se lo usa de manera descuidada (por ejemplo invocando el bra $\langle x|$ y llamando función de onda a $\langle x|\phi\rangle$), sin mencionar que no pertence a $\mathcal{H}$. La función de onda no es más que un elemento de $\mathcal{H}$ y por lo tanto el uso de $|x\rangle$ puede traer confusiones, salvo que se desarrolle el formalismo de autovectores generalizados, pero no lo haremos en la materia.

22. **Espacio de momentos** Muestre que si se definen $Xf(x) = i\hbar f'(x)$ y $Pf(x) = xf(x)$, con dominios apropiados, la relación de conmutación canónica $[X, P] = i\hbar I$ se sigue satisfaciendo.

23. Teniendo en cuenta que existe la representación en el espacio de coordenadas (ejercicio 20) y la de momentos (ejercicio 22) en $L^2(\mathbb{R})_c$ y $L^2(\mathbb{R})_p$ repectivamente,

    a) Mostrar que los operadores están relacionados por $U^{-1}T_pU$, donde T_p es X o P (en el espacio de momentos) y $U : \mathcal{H}_{\mathrm{c}} \to \mathcal{H}_p$ representa transformada de Fourier (que es un operador unitario, obviando el dominio apropiado de su definición). Se dice que ambas representaciones son unitariamente equivalentes y su implicancia física viene dada por el siguiente item.

    b) Mostrar que si $|u_c\rangle \in \mathcal{H}_c$ y $\langle u_c|T_c|u_c\rangle$ es su valor medio para X o P en el espacio de coordenadas, entonces $\langle u_p|T_p|u_p\rangle = \langle u_c|T_c|u_c\rangle$. Esto implica que ambas representaciones son físicamente equivalentes.

[4] Existe una sutileza en cuanto al operador P dado que viene de una derivada. No vamos a entrar en esto, pero sí se puede decir que al restringirlo a un subespacio denso (ver siguiente notal al pie) P actúa como derivada común y corriente.

[5] Puede tener en cuenta que el espacio de funciones continuas y de soporte compacto es denso en $L^2(\mathbb{R})$ así como lo es el espacio de funciones de Schwartz.

Resultado: el teorema que garantiza que no importa qué representación se use (o sea que todas son unitariamente equivalentes) se debe a Von Neumann, pero en vez de trabajar con las relaciones de conmutación canónicas $[X, P] = i\hbar I$, está formulado sobre las *relaciones de Weyl* para exponenciales de la forma $U(\alpha, \beta) = e^{i\alpha X} e^{i\beta P}$, las cuales corren con la gran ventaja de ser operadores acotados. Se puede ver que a partir de representaciones de las relaciones de Weyl siempre se obtienen, mediante teorema de Stone, representaciones de las relaciones canónicas de conmutación (la inversa no vale).

24. **Versión "light" de la descomposición espectral**: Si un operador T tiene autovalores λ_s con autovectores ϕ_s que forman una base ortonormal densa en $\mathcal{H}$, el operador es esencialmente autoadjunto[6]. Muestre que si P_s es el proyector sobre el autoespacio del autovalor λ_s, se puede escribir el operador como
$$T = \sum_s \lambda_s P_s$$
Si s es un parámetro continuo la suma es una integral.

25. Como ejemplo de lo tramposo del asunto de los operadores X y P por no ser acotados y lo importante de su dominio, consideremos el caso de funciones en un intervalo: $\mathcal{H} = \{f \in L^2([0, 1])\}$. El dominio de P lo elegimos como
$$D(P) = \{f \in \mathcal{H}; \quad f' \in \mathcal{H} \text{ y } f(0) = f(1) = 0\}.$$
   a) Mostrar que vale $(Pf, g) = (g, Pf)$ para $f, g \in D(P)$ (o sea, que P es simétrico).
   b) Mostrar que $D(P) \subset D(P^\dagger)$ y que P no es esencialmente autoadjunto (use que un T simétrico es esencialmente auto-adjunto si y solo si Ker$(T^\dagger \pm i) = \{0\}$, o más fácil puede mostrar que $P^\dagger$ no es esencialmente auto-adjunto porque tiene autovalores complejos $\pm i$). Como no es esencialmente auto-adjunto P no tiene una única extensión auto-adjunta.
   c) Muestre que si ahora solo se pide $f(0) = f(1)$ para las funciones en $D(P)$, entonces P es esencialmente auto-adjunto. Basta encontrar una base ortonormal densa en $\mathcal{H}$ de autovectores de P.

26. Considerar el pozo infinito, o sea $H = P^2/2m$ y $\mathcal{H} = L^2([0, 1])$. Consideramos que el dominio de H son funciones $\phi \in \mathcal{H}$ tal que $\phi'' \in \mathcal{H}$ y $\phi(0) = \phi(1) = 0$, de manera similar al ejercicio anterior.
   a) Explicite el dominio máximo del adjunto del Hamiltoniano H. Es H autoadjunto?
   b) Construir una base ortonormal de $\mathcal{H}$ a partir de los autoestados ψ_n de H con autovalores λ_n.
   c) Considerar H^2 y establecer su dominio.
   d) Considerar el estado
$$\phi = \frac{\sqrt{15}}{4}(1 - x^2).$$
   Es evidente que tiene autovalor nulo de H^2, pero por otro lado, según el ejercicio 24, $(\phi, H^2\phi) = \sum_n \lambda_n^2 |(\psi_n, \phi)|^2 > 0$, donde ψ_n son los hallados en el item b. Explicar esta aparente contradicción.

Referencia amigable: En el material adicional de la materia se encuentra el paper *Self-adjoint extensions of operators and the teaching of quantum mechanics*, el cual explica las posibles extensiones autoadjuntas del operador momento y del hamiltoniano en ciertas situaciones usuales de

[6] En realidad el *criterio de Nelson* dice que si T es simétrico y $D(T)$ contiene un conjunto de vectores analíticos de T que generan un un subespacio denso en $\mathcal{H}$ entonces T es esencialmente auto-adjunto. Un vector $|u\rangle$ es analítico para T si $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{||T^n|u\rangle||}{n!} t^n < \infty$ para algún $t > 0$.

mecánica cuántica con detalle. Para referencias rigurosas y completas, aunque menos amigables, ver los libors de Simon y Reed y el de Valter Moretti que están mencionados en la Bibliografía de la materia.