Física Teórica 2

Segundo cuatrimestre de 2016
Guía 1: Estados cuánticos, operadores, espectros discretos y continuos

Nota: Esta guía es para aprender a operar con operadores y vectores de espacios de Hilbert (kets), dejando de lado cuestiones técnicas como dominio de operadores, si están acotados o no, etc..

Espacios de Hilbert de dimensión finita

1. *a*) Pruebe las siguientes identidades para operadores A, B, C, D en cierto espacio de Hilbert, con $[A, B] := AB - BA$ y $\{A, B\} := AB + BA$.

$$\begin{aligned} 0 &= [A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] \quad \text{(identidad de Jacobi)} \\ [A, B+C] &= [A,B] + [A,C] \\ [A, BC] &= [A,B]C + B[A,C] \\ [AB, CD] &= -AC\{D,B\} + A\{C,B\}D - C\{D,A\}B + \{C,A\}DB \ , \end{aligned}$$

   b) Suponga que B es tal que conmuta con el conmutador $[A, B]$. Verifique entonces que $[A, B^n] = nB^{n-1}[A, B]$.

   c) Dado un operador A, se define formalmente la exponencial de A como

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \, .$$

   Compruebe que $e^{\lambda A}$ es la solución a la ecuación diferencial $h'(\lambda) = Ah(\lambda)$. Además, que si A y B conmutan con $[A, B]$, entonces

$$e^A e^B = e^{A+B+[A,B]/2} \, .$$

   Esta es una de las relaciones que se desprenden de la fórmula de Baker-Campbell-Haussdorf. Ayuda: considere las funciones[1] $f(\lambda) = e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}$ y $h(\lambda) = e^{\lambda A} e^{\lambda B} e^{-\frac{\lambda^2}{2}[A,B]}$, y las ecuaciones diferenciales que satisfacen. Note que $e^A e^B \neq e^{A+B}$!

2. En un espacio vectorial V de dimensión 2 considere los operadores $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, que en la base ortonormal $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ de V, con

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

   se representan mediante las matrices

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

   Estas tres matrices se conocen como *matrices de Pauli*.

   a) ¿Son hermíticas estas matrices? Halle sus autovalores y autovectores en esta base.

[1] Estas son funciones que toman un numero real y lo mandan a un operador, o sea son funciones con valores en operadores. Se las puede pensar como curvas en el espacio de operadores.

b) Verifique que se satisfacen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \det(\sigma_k) &= -1 \\ Tr(\sigma_k) &= 0 \\ \sigma_i^2 &= I \\ \sigma_j\sigma_k &= i\epsilon_{jkl}\sigma_l + I\delta_{jk} \ , \end{aligned}$$

donde I representa a la matriz identidad, $k = 1, 2, 3$ ($\equiv x, y, z$), ϵ_{ijk} es la densidad tensorial de Levi-Civita, y δ_{ij} es la delta de Kronecker. En la última identidad se usa la suma sobre índices repetidos.

3. Suponga una matriz X de 2×2 que se escribe en la forma

$$X = a_0 I + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}$$

donde a_0 y $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ son números, y $\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$.

a) ¿Cómo se relacionan los a_k ($k = 0, 1, 2, 3$) con $\mathrm{Tr}(X)$ y $\mathrm{Tr}\ (\sigma_k X)$?

b) Obtenga a_0 y a_k en término de los elementos de matriz X_{ij}. Muestre que cualquier matriz X hermítica de 2×2 se puede escribir en esta forma.

4. Suponga que $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ y $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle\}$ son dos bases ortogonales de cierto Hilbert con producto interno $\langle|\rangle$.

a) Considere $|u\rangle = |\alpha\rangle - i\,|\beta\rangle$ y $|v\rangle = i\,|\alpha\rangle + |\beta\rangle$. ¿Cuánto vale $\langle u|v\rangle$? ¿Son ortogonales?

b) Sea $|k\rangle = \sum_{i=1}^{3} a_{ki}\,|i\rangle$, con $k = \alpha, \beta, \gamma$. ¿Cuánto valen $\langle 2|\beta\rangle$ y $\langle\alpha|3\rangle$?

c) Escriba $|u\rangle$ y $|v\rangle$ en la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ y calcule nuevamente $\langle u|v\rangle$.

5. Pruebe o evalúe los siguientes items:

a) La traza es independiente de la base en la que se escribe el operador.

b) $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$ y $\mathrm{Tr}(XYZ) = \mathrm{Tr}(ZXY)$, donde X,Y y Z son operadores.

c) $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$.

d) Calcule $\exp[i\mathrm{f(A)}]$ en forma de ket-bra, donde A es un operador hermítico cuyos autovalores son conocidos.

Nota: hay muchos operadores que suelen aparecer que no tienen una traza bien definida. Ver la guía complementaria sobre formalismo matemático.

6. *a*) Considere dos kets $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$. Suponga que $\langle a_1|\alpha\rangle, \langle a_2|\alpha\rangle, \ldots$ y $\langle a_1|\beta\rangle, \langle a_2|\beta\rangle, \ldots$ son todos conocidos, donde $\{|a_j\rangle\}_{j\in\mathbb{N}}$ forman un conjunto completo de kets base. Encuentre la representación matricial del operador $|\alpha\rangle\langle\beta|$ en esta base.

b) Considere ahora un sistema de espín 1/2 (problema 2), con operadores $S_j = \frac{\hbar}{2}\sigma_j$. Sean $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ iguales a $|S_z = \hbar/2\rangle$ y $|S_x = \hbar/2\rangle$, los autoestados de S_z y S_x con autovalores $\frac{\hbar}{2}$, respectivamente. Escriba explicitamente la matriz cuadrada que corresponde a $|\alpha\rangle\langle\beta|$ en la base usual (la que hace a $S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$ diagonal).

7. Suponga que $|i\rangle$ y $|j\rangle$ son autoestados de algún operador hermítico A. ¿Bajo qué condiciones se puede concluir que $|i\rangle + |j\rangle$ también es autoestado de A? Justifique.

8. Usando la ortonormalidad de $|+\rangle$ y $|-\rangle$, pruebe que

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar S_k \qquad \{S_i, S_j\} = (\hbar^2/2)\delta_{ij}$$

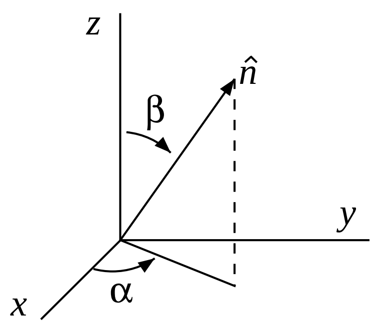
donde

$$\begin{aligned}
S_x &= \frac{\hbar}{2}\left[|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right] \\
S_y &= \frac{i\hbar}{2}\left[-|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right] \\
S_z &= \frac{\hbar}{2}\left[|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|\right] .
\end{aligned}$$

9. Construya $|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle$ tal que

$$\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}\;|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle = \frac{\hbar}{2}\;|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ está caracterizado por los ángulos que se muestran en la figura. Exprese su respuesta como una combinación lineal de $|+\rangle$ y $|-\rangle$.



Nota: la respuesta es

$$\cos(\beta/2)\,|+\rangle + \sin(\beta/2)e^{i\alpha}\,|-\rangle \;\; .$$

En lugar de verificar que esta respuesta satisface la ecuación de autovalores de arriba, considere al problema como un problema de autovalores. En la guía de operadores de rotación veremos una manera más simple de obtener este resultado.

10. El hamiltoniano de un sistema de dos niveles es

$$H = a\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right)$$

donde a es un número con dimensiones de energía. Encuentre los autovalores de energía y los correspondientes autoestados como una combinación lineal de $|1\rangle$ y $|2\rangle$.

11. Un sistema de dos niveles está caracterizado por el hamiltoniano

$$H = H_{11}\,|1\rangle\langle 1| + H_{22}\,|2\rangle\langle 2| + H_{12}\left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right)$$

donde H_{11}, H_{22}, H_{12} son números reales con dimensiones de energía y $|1\rangle$ y $|2\rangle$ son autoestados de algún observable(distinto de H). Encuentre los autoestados de energía y los correspondientes autovalores.

12. Un sistema de espín $1/2$ está en un autoestado de $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ con autovalor $\hbar/2$, donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario en el plano xz que forma un ángulo γ con el eje positivo z.

a) Suponga que se mide S_x. ¿Cuál es la probabilidad de obtener $\hbar/2$ en función de γ? Verifique que los casos $\gamma + 0, \pi/2$ tienen sentido.

b) Evalúe la dispersión de S_x, es decir $\left\langle (S_x - \langle S_x \rangle)^2 \right\rangle$. Verifique el resultado para los casos $\gamma = 0, \pi/2, \pi$.

13. Un haz de átomos de espín $1/2$ es sometido a una serie de mediciones del tipo Stern-Gerlach en la siguiente manera:

    a) La primera medición acepta átomos con $s_z = \hbar/2$ y rechaza átomos con $s_z = -\hbar/2$.

    b) La segunda medición acepta átomos con $s_n = \hbar/2$ y rechaza con $s_n = -\hbar/2$, donde s_n es el autovalor del operador $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ con $\hat{\mathbf{n}}$ en el plano xz y formando un ángulo β con el eje z.

    c) Una tercera medición acepta $s_z = -\hbar/2$ y rechaza $s_z = \hbar/2$.

    ¿Cuál es la intensidad del haz final $s_z = -\hbar/2$ si el haz $s_z = \hbar/2$ que pasa la primer medición esta normalizado a uno? Como se debe orientar el segundo aparato de medición para maximizar la intensidad del haz final $s_z = -\hbar/2$?

14. Un cierto observable en mecánica cuantica tiene una representación matricial de 3×3 como sigue

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

    a) Encuentre los autovectores normalizados de este observable y los correspondientes autovalores. ¿Hay degeneración?

    b) De un ejemplo físico donde todo esto sea relevante.

15. Dada la matriz

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

    a) Pruebe que J es unitaria y halle J^{-1}.

    b) Aplique la transformación $B = JAJ^{-1}$ a una matriz simétrica A y verifique que: (i) B es simétrica, (ii) $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$. La transformación $A \mapsto JAJ^{-1}$ se conoce como conjugación.

    c) Dada una matriz A simétrica, halle θ de modo que B resulte ser diagonal.

16. Sean A y B dos observables. Suponga que los autokets simultaneos de A y B $\{|a', b'\rangle\}$ forman un conjunto ortonormal completo de kets base. ¿Se puede siempre concluir que $[A, B] = 0$? Si su respuesta es sí, pruébela. Si es no, de un contraejemplo.

17. Considere un espacio de kets tridimensional. Si un dado conjunto de kets ortonormales, digamos $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$, se usan como kets base, los operadores A y B están representados por

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix}$$

    donde a y b son reales.

    a) Obviamente A tiene un espectro degenerado. ¿También lo tiene B ?

    b) Muestre que A y B conmutan.

c) Encuentre un nuevo conjunto de kets ortonormales que sean autokets simultaneos de A y B. Especifique los autovalores de A y B para cada uno de los tres autokets. ¿La especificación de los autovalores caracteriza completamente a cada autoket?

18. Considere un sistema físico cuyo espacio de estados está desarrollado en la base $\{|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle\}$. En esta base, los operadores H y B están dados por

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

mientras que los operadores L y S se definen según

$$L|u\rangle = |u\rangle \quad L|v\rangle = 0 \quad L|w\rangle = -|w\rangle$$
$$S|u\rangle = |w\rangle \quad S|v\rangle = |v\rangle \quad S|w\rangle = |u\rangle$$

a) Muestre que H y B conmutan. Construya una base de autovectores comunes a ambos.

b) ¿Cuáles de los conjuntos $\{H\}$,$\{B\}$,$\{H, B\}$,$\{H^2, B\}$ son CCOC?

c) Escriba las matrices que representan a los operadores L, L^2, S, y S^2 en la base $\{|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle\}$. ¿Son estos operadores observables?

19. Dos operadores hermíticos anticonmutan, es decir que $\{A, B\} = AB + BA = 0$. ¿Es posible tener un autoket común de A y B? Pruebe o ilustre su conclusión.

20. Dos observables A_1 y A_2, que no involucran explicitamente el tiempo, no conmutan ($[A_1, A_2] \neq 0$), pero se sabe que ambos conmutan con el hamiltoniano ($[A_1, H] = [A_2, H] = 0$). Pruebe que debe haber alguna degeneración en los autoestados de energía. Como un ejemplo, puede pensar en el problema de fuerzas centrales $H = p^2/2m + V(r)$, con $A_1 \to L_z$ y $A_2 \to L_x$.

21. a) Calcule

$$\left\langle (\Delta S_x)^2 \right\rangle := \left\langle S_x^2 \right\rangle - \langle S_x \rangle^2$$

donde el valor de expectación es para el estado $|S_z+\rangle$. Usando su resultado, verifique la relación de incerteza generalizada,

$$\left\langle (\Delta A)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta B)^2 \right\rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$$

con $A = S_x$ y $B = S_y$.

b) Verifique la relación de incerteza para los mismos operadores para el estado $|S_x+\rangle$.

Espacios de Hilbert, incluso de dimensión infinita. Ejemplo usual: $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$

Recuerde que el producto interno usual de $L^2(\mathbb{R})$ entre un elemento ϕ y otro ψ es $(\phi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} \bar{\phi}\psi$.

22. a) La manera mas fácil de derivar la desigualdad de Schwarz es la siguiente. Primero observe que

$$(\langle\alpha| + \lambda^* \langle\beta|) \cdot (|\alpha\rangle + \lambda |\beta\rangle) \geq 0$$

para cualquier número complejo λ. Luego, elija λ de tal forma que la desigualdad anterior se reduzca a la desigualdad de Schwarz, $\langle\alpha|\alpha\rangle \langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$.

b) Para dos observables A y B y un estado cualquiera, pruebe la relación de incerteza de Schrodinger,

$$\left\langle (\Delta A)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta B)^2 \right\rangle \geq \frac{1}{4} \left|\langle [A,B] \rangle\right|^2 + \frac{1}{4} \left|\langle \{A,B\} \rangle - 2 \langle A \rangle \langle B \rangle\right|^2 \ ,$$

donde $\Delta A = A - \langle A \rangle$. Note que la relación de incerteza de Heisenberg se desprende de ésta.

c) Muestre que el signo igual en la relación de incerteza generalizada se obtiene si el estado en cuestión satisface

$$\Delta A \left|\psi\right\rangle = \lambda \Delta B \left|\psi\right\rangle , \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Además, concluya que si λ es un imaginario puro entonces se obtiene la igualdad en la relación de incerteza de Heisenberg.

23. *a*) En $L^2(\mathbb{R})$ se suele representar al operador posición como $(x\,\phi)(u) = u\phi(u)$ y al momento como $(p\,\phi)(u) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial u}\phi(u)$. Verifique que la función de onda normalizada de un paquete gaussiano, dada por

$$\phi(u) = (2\pi d^2)^{-1/4} \exp\left[\frac{i \langle p \rangle u}{\hbar} - \frac{(u - \langle x \rangle)^2}{4d^2}\right] \in \mathcal{H}$$

satisface la relación de incerteza mínima

$$\sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle}\sqrt{\langle (\Delta p)^2 \rangle} = \frac{\hbar}{2} \ .$$

No es necesario resolver integrales Gaussianas. Muestre también que la condición

$$\Delta x \phi(u) = c \Delta p \phi(u)$$

donde c es un número imaginario, efectivamente se cumple para dicho paquete, en acuerdo con el ejercicio anterior.

24. Considere un espacio de kets generado por los autokets $\{|a_j\rangle\}_{j\in\mathbb{N}}$ de un operador hermítico A. No hay degeneración.

a) Pruebe que

$$\prod_{j\in\mathbb{N}} (A - a_j)$$

es el operador nulo.

b) Para k fijo, ¿Cuál es el significado del operador

$$\prod_{j\in\mathbb{N}-\{k\}} \frac{(A - a_j)}{(a_k - a_j)} \ \ ?$$

c) Ilustre los dos puntos anteriores usando $A = S_z$ de un sistema de espín $1/2$ (ahora el índice j solo toma dos posibles valores).

25. Evalúe $\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta p)^2 \right\rangle$ para una partícula confinada en un pozo unidimensional, para estados estacionarios: $H\psi = E\psi$ (asuma que el dominio de H son funciones de cuadrado integrable que se anulan en las paredes).

$$V = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < a \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Muestre que para el estado estacionario de menor $\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta p)^2 \right\rangle$ se satisface la relación de incerteza de Heisenberg.

26. Construya la matriz de transformación de base que conecta la base donde S_z es diagonal con la base en que S_x es diagonal. Muestre su resultado en la forma "ket-bra"

$$U = \sum_{jl} c_{jl} \left|\text{base nueva}_j\right\rangle \left\langle \text{base vieja}_l\right| \ .$$

27. *a*) Suponga que $f(A)$ es una función analítica de un operador hermítico A con la propiedad $A|a_j\rangle = a_j|a_j\rangle$. Evalúe $\langle b_k|f(A)|b_l\rangle$ suponiendo que se conoce la matriz de transformación entre la base $|a_j\rangle$ y la base $|b_k\rangle$.

28. *a*) Sea x y p_x la coordenada y el momento lineal en una dimensión. Evalúe el corchete de Poisson clásico

$$\{x, F(p_x)\}_{\text{clásico}} \ .$$

b) Sean ahora x y p_x los correspondientes operadores cuánticos. Evalúe el conmutador

$$[x, \exp(\frac{ip_x a}{\hbar})] \ ,$$

y compare con (a) cuando $F(p_x) = \exp(ip_x a/\hbar)$.

c) Usando el resultado de (b) y asumiendo que el operador x tiene autoestados (cosa que no es cierta en $L^2(\mathbb{R})$!), pruebe que

$$\exp(\frac{ip_x a}{\hbar})\,|b\rangle \ ,$$

es un autoestado del operador x, donde $x|b\rangle = b|b\rangle\,,\ b \in \mathbb{R}$. ¿Cuál es el correspondiente autovalor?

29. *a*) Verifique que las igualdades

$$[x_i, G(\mathbf{p})] = i\hbar\frac{\partial G}{\partial p_i} \qquad\qquad [p_i, F(\mathbf{x})] = -i\hbar\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

pueden derivarse a partir de las relaciones de conmutación fundamentales, para cualquier par de funciones F y G que puedan ser expresadas en serie de potencias de su argumento.

b) Evalúe $[x^2, p^2]$. Compare su resultado con el corchete de Poisson clásico $\{x^2, p^2\}_{\text{clásico}}$ y piense por qué difieren (además del $i\hbar$ usual).

30. El operador de traslación para un desplazamiento espacial finito está dado por

$$\mathcal{T}(\mathbf{l}) = \exp\left(\frac{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{l}}{\hbar}\right)$$

donde $\mathbf{p}$ es el operador impulso (ver ejercicio 28.c y la guía complementaria de formalismo).

a) Evalue $[x_i, \mathcal{T}(\mathbf{l})]$.

b) Muestre que $\mathcal{T}$ es un operador unitario usando que $\mathbf{p}$ es hermítico.

c) Usando los puntos anteriores, demuestre que el valor de expectación $\langle\mathbf{x}\rangle$ cambia frente a traslaciones (es decir, cambia cuando el estado en cuestión es ψ o su trasladado $\mathcal{T}(\mathbf{l})\psi$). Note que no hizo falta suponer la existencia de autoestados de la posición, y el resultado justifica interpretar a $\mathcal{T}(\mathbf{l})$ como el operador de traslaciones espaciales.

31. *a*) Considere $\mathcal{H}' = L^2(\mathbb{R})$ pero ahora $x = i\hbar\frac{\partial}{\partial v}$ y $p = v$ sobre funciones $\psi(v) \in \mathcal{H}'$. Piense qué sucede con el conmutador canónico $[x, p]$ y cómo se relacionan los estados de este espacio de Hilbert con aquel que veniamos usando, donde $x = u$ y $p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial u}$. ¿ Es caprichoso elegir una representación de los operadores o la otra? Vea la guía complementaria de formalismo para discutir esto un poco más.

b) ¿Cuál es el significado físico de $\exp(ixk/\hbar)$, donde x es el operador posición y k es algún número con dimensiones de momento? Justifique su respuesta.