Física Teórica 2

Segundo cuatrimestre de 2016
Guía 4: SU(2): Impulso angular y rotaciones

Cuestiones generales del grupo de Lie $SU(2)$ y el algebra $su(2)$

1. Considere las matrices unitarias de determinante uno de 2×2: $SU(2)$. Muestre que forman un grupo con el producto '.' dado por multiplicar matrices, es decir, que satisfacen
   - $g.g' \in SU(2)$ si $g, g' \in SU(2)$
   - $\forall g \in SU(2) \quad \exists g' \in SU(2)$ tal que $g'.g = g.g' =$Id. Se suelde decir que $g' = g^{-1}$.
   - La matriz identidad satisface g.Id=Id.$g = g, \quad \forall g \in SU(2)$.
   - $g.(h.f) = (g.h).f$, para todo $g, h, f \in SU(2)$

2. Mostrar que toda matriz de $SU(2)$ se puede escribir de la forma

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

   con α y β números complejos tales que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Concluir que los elementos de $SU(2)$ corresponden a puntos en una tres-esfera S^3 embebida en $\mathbb{R}^4$. Los grupos que admiten una estructura de superficie (*variedad* es el término) se denominan grupos de Lie: en este caso al grupo $SU(2)$ se le da la estructura diferenciable de S^3.

3. La versión infinitesimal de $SU(2)$, su álgebra: se define el álgebra de un grupo de Lie como el tangente al elemento identidad. Para entender esto, considere una familia de elementos de $SU(2)$ arbitrarios en la forma del ejercicio anterior, con $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ funciones del parámetro t restringidas a la condición (A) $|\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 = 1$. Queremos tomar el tangente en la identidad, por lo tanto $\alpha(0) = 1$ y $\beta(0) = 0$. Derive respecto a t cada elemento de matriz así como la condición (A), evalúe a $t = 0$ y concluya que el álgebra $su(2)$ se puede pensar como las matrices de la forma

$$\dot{g}|_{t=0} = X = \begin{pmatrix} i\lambda & z \\ -\bar{z} & -i\lambda \end{pmatrix}$$

   con λ real y z complejo.

4. El álgebra de $su(2)$ en términos abstractos: considerar un espacio vectorial de tres dimensiones, con un producto que en una base $\{J_1, J_2, J_3\}$ toma la forma:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$$

   Mostrar que este espacio vectorial es un algebra de Lie, o sea que el producto satisface la propiedad de Jacobi:

$$[J_1, [J_2, J_3]] + [J_2, [J_3, J_1]] + [J_3, [J_1, J_2]] = 0$$

   Este es el álgebra del grupo $SU(2)$ (denominada $su(2)$) y codifica toda la información del grupo (no siempre sucede esto con otros grupos y sus álgebras). Los J_i se denominan *generadores* del grupo, ya que al exponenciarlos se recupera el grupo de Lie.

   Aclaración: este es el álgebra $su(2)$ pero donde los generadores no tienen la forma de la matriz X del ejercicio anterior, sino iX, por esto es que va a aparecer siempre $-iJ_j$ en las exponenciales para formar un elemento del grupo.

5. Mostrar que sobre $\mathbb{C}^2$ las matrices de $SU(2)$ actúan con las siguientes propiedades:

   - Linealidad (no hay trampa, es trivial)
   - $g'.(g.v) = (g'.g).v$ donde $v \in \mathbb{C}^2$. Esto es que la manera de actuar sobre vectores respete el producto del grupo (producto de matrices en este caso).

   Se llama representación fundamental a aquella en que los matrices de $n \times n$ de un grupo actúan naturalmente sobre un espacio vectorial de dimensión (compleja) n. En el caso de $SU(2)$ esta es la representación de spin $1/2$ (que tiene dimensión 2).

6. Mostrar que si σ_i con $i = 1, 2, 3$ son las matrices de Pauli, entonces

   a) $J_i = \sigma_i/2$ satisface precisamente el producto del ejercicio anterior, donde $[,]$ es conmutador de las matrices. Esta es la representación 2-dimensional de $su(2)$, la llamada de spin $1/2$.

   b) cualquier elemento de $SU(2)$ en la representación fundamental es de la forma $\exp\left(-i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{n}}{2}\phi\right)$, con n_i las componentes de un versor y ϕ un ángulo.

   c) una rotación en cualquier dirección y de ángulo 2π en un espacio 2-dimensional equivale a multiplicar por -1.

7. Se dice que ρ es representación (lineal) de un álgebra si, por ejemplo en este caso $[\rho(J_i), \rho(J_j)] = \rho([J_i, J_j])$. Mostrar que las siguientes matrices de 3×3 son una representación de dimensión 3 de $su(2)$:

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

   con $\rho : J_i \mapsto F_i$.

8. Para hablar de otras representaciones de $su(2)$, construya los operadores de subida y bajada J_+ y J_- a partir de la base del ejercicio 4, tales que $[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm$. Muestre además que

   a) Un Casimir (elemento que conmuta con todo) de $su(2)$ es $J^2 = J_i J_i$. Se puede ver que es el único Casimir de $su(2)$.

   b) Mostrar que si m es autovalor de J_z y $j(j+1)$ es autovalor de J^2, con autoestado correspondiente $|j \quad m\rangle$, entonces j es semi-entero positivo, m varía en saltos de una unidad y $-j \leq m \leq j$ (usar que J_i deben ser observables). Concluir que los estados $|j \quad m\rangle$ son una base ortonormal de $\mathbb{C}^{j(j+1)}$, para j fijo. Esta es una *representación irreducible* (dado j). Ayuda: ver por ejemplo la sección 3.5 del Sakurai o el capítulo 7 del Ballentine.

   c) Vamos a llamar operadores de spin S_i a $S_i := \hbar J_i$. Mostrar que entonces $S_z|j\, m\rangle = \hbar m|j\, m\rangle$ y $S^2|j\, m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j\, m\rangle$. Ídem con el momento angular: $L_i = \hbar J_i$, con la salvedad que solo van a actuar sobre funciones de cuadrado integrable y esto implica j entero (ver ejercicio 18 más abajo).

9. Si $\langle j\, m|j'\, m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}$ entonces mostrar que

$$\langle j'\, m'|J_\pm|j\, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\delta_{jj'}\delta_{m', m\pm 1}$$

10. Se define $\mathrm{ad}_X(Y) := [X, Y]$, donde X, Y pertencen a un álgebra de Lie. Usando la propiedad $e^X Y e^{-X} = e^{\mathrm{ad}_X} Y$, mostrar que

$$\mathrm{Ad}_{e^{iJ_z\phi}}(J_x) := e^{iJ_z\phi} J_x e^{-iJ_z\phi} = J_x \cos(\phi) - J_y \sin(\phi)$$

y

$$\mathrm{Ad}_{e^{iJ_z\phi}}(J_y) := e^{iJ_z\phi} J_y e^{-iJ_z\phi} = J_x \sin(\phi) + J_y \cos(\phi)$$

independientemente de la representación de $su(2)$. Escribir el resultado como

$$\mathrm{Ad}_{e^{iJ_z\phi}}(J_i) = R_{ij}\, J_j$$

con R una matriz de rotación de tres dimensiones. Si bien esta fue una rotación muy particular (en $\hat{z}$), se puede ver que los operadores J_i transforman como vectores ante rotaciones de $\mathrm{SU}(2)$:

$$g J_i g^{-1} = (R_g \vec{J})_i, \quad g \in SU(2), \quad R_g \in SO(3)$$

Sistemas de spin $1/2$

11. Considere un estado arbitrario $|\alpha\rangle$ de un sistema de espín $1/2$, sobre el que se aplica una rotación en un ángulo φ alrededor del eje z,

$$|\alpha\rangle_R = \exp\left(-i\frac{S_z\varphi}{\hbar}\right)|\alpha\rangle \ .$$

   a) Calcule $\langle S_x\rangle_R$ en el sistema rotado, en función de los valores de expectación $\langle S_x\rangle$ y $\langle S_y\rangle$ en el sistema original.

   b) Muestre que para una rotación de 2π en φ se satisface

$$|\alpha\rangle_R = -\,|\alpha\rangle \ .$$

   Observe que no se obtiene el mismo estado debido a un factor de fase. ¿Puede observarse este efecto? Vea *Phys. Rev. Lett* **35**, 1053 (1975), o *Phys. Today*, Dic. 1980, pag. 24.

12. *a*) Usando las propiedades de conmutación y anticonmutación de las matrices de Pauli, pruebe la identidad

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \ ,$$

   donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son dos vectores complejos en tres dimensiones.

   b) Usando (a), muestre que el operador rotación para un sistema de espín $1/2$ en la base $\{|+\rangle\,,|-\rangle\}$ se puede escribir como

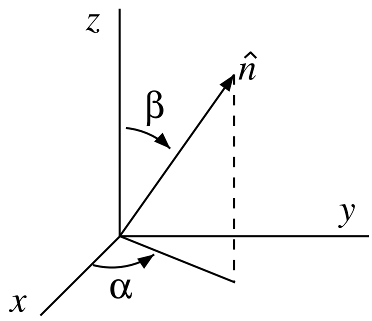
$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\mathbf{n}},\phi) = \exp\left(-i\frac{\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}\phi}{\hbar}\right) = I\cos\frac{\phi}{2} - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\sin\frac{\phi}{2} \ ,$$

   donde I es la matriz identidad.

   c) Escriba explícitamente la matriz de 2×2 $\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\mathbf{n}},\phi)$ que representa la rotación $(\hat{\mathbf{n}},\phi)$.

   d) Sea $\hat{\mathbf{n}}$ el versor definido por los ángulos polares α y β según se muestra en la figura. Aplíque al ket $|+\rangle$ el operador de rotación adecuado para obtener el estado $|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}},+\rangle$, que representa un espín $+\frac{\hbar}{2}$ orientado según $\hat{\mathbf{n}}$. Compare el resultado con el obtenido en el problema 9 de la guía 1.

13. Considere los problemas 3 y 4 de la guía 2. Encuentre la evolución de $|\alpha\rangle = |S_x,+\rangle$ en el picture de Schrodinger y la de $\vec{S}$ en el de Heisenberg pero ahora entendiendo al operador evolución como una rotación en $\hat{z}$ (ya que H es proporcional a S_z). Tenga en cuenta el ejercicio 9 de esta guía.



14. Considere la secuencia de rotaciones de Euler de un sistema de espín $1/2$ representada por

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma) = \mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\mathbf{z}},\alpha)\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\mathbf{y}},\beta)\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\mathbf{z}},\gamma)\ . \tag{1}$$

   a) Muestre que la matriz de 2×2 que representa esta rotación es

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma) &= \exp\left(-i\frac{\sigma_z\alpha}{2}\right)\exp\left(-i\frac{\sigma_y\beta}{2}\right)\exp\left(-i\frac{\sigma_z\gamma}{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2} \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   b) Debido a que las rotaciones tienen estructura de grupo y las $\mathcal{D}^{(1/2)}$ son representaciones del grupo, esperamos que esta secuencia de operaciones sea equivalente a una única rotación alrededor de algún eje $\hat{n}$ con ángulo θ representada por $\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{n},\theta)$. Encuentre θ y la dirección de dicho eje.

   Nota: toda rotación (para cualquier j dado) puede escribirse como la composición de tres rotaciones, la primera y la última en $\hat{z}$ y la segunda en $\hat{y}$, con los ángulos de Euler como figura en (1). Por esto suele ser importante calcular los elementos de matriz de una rotación en $\hat{y}$ en la base de autoestados de J_z (ver ejercicio 21 para el caso $j=1$).

Sistemas de spin 1

15. Considere una partícula de espín 1. Evalúe los elementos de matriz de $S_z(S_z+\hbar)(S_z-\hbar)$ y de $S_x(S_x+\hbar)(S_x-\hbar)$ sin usar la representación matricial de S_x.

16. Construya, por aplicación de los operadores de subida y de bajada, las matrices que representan a los operadores L^2, L_x, L_y, y L_z en el subespacio generado por la base $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$ de autoestados de L^2 y L_z. Verifique explícitamente multiplicando las matrices la relación $[J_x,J_y]=i\hbar J_z$.

   a) Encuentre la base $\{|l,m_y\rangle\}$ de autoestados de L^2 y L_y de dicho subespacio. Escríbala como combinación lineal de los $|l,m\rangle$.

   b) Sea un estado descripto por el vector en la base $|l,m\rangle$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,1\rangle - |1,-1\rangle\right)\ .$$

   Si se mide L_x, ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades? Repita el cálculo si se mide L_y.

c) Sobre el estado $|\psi\rangle$ se mide L_z y se obtiene $\hbar$, e inmediatamente después se mide L_y. ¿Qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

17. Un autoestado de momento angular $|j, j\rangle$ se rota en un ángulo infinitesimal ϵ alrededor del eje $\hat{y}$. Obtenga una expresión para la probabilidad de que el nuevo estado rotado se encuentre en el estado original, hasta términos de orden ϵ^2 inclusive.

18. Muestre que los operadores de momento angular L_i en la representación de coordenadas vienen dados por
$$\vec{L} = -i\hbar\left[\hat{\phi}\frac{\partial}{\partial\theta} - \hat{\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right].$$
Esto muestra que actúan en $L^2(S^2)$ sin importar la dependencia radial de funciones de $L^2(\mathbb{R}^3)$.

19. Construya los armónicos esféricos $Y_{1,m} \in L^2(S^2)$. Para ello, resuelva primero $L_+ Y_{1,1} = 0$ (L_+ en la representación de coordenadas) y aplique luego el operador L_- a $Y_{1,1}$ (previamente normalizado) para hallar los otros dos restantes. Usando los resultados del problema 16, escriba la combinación lineal de éstos que es autoestado de L_y con autovalor $\hbar$. Verifique su resultado aplicándole L_y en la representación de coordenadas.

20. Suponga que fuera posible un valor semi-entero de l, por ejemplo $1/2$, para el impulso angular orbital. A partir de
$$L_+\, Y_{1/2,1/2}(\theta, \phi) = 0$$
podemos deducir, como de costumbre
$$Y_{1/2,1/2}(\theta, \phi) \propto e^{i\phi/2}\sqrt{\sin\theta}\,.$$
Intente construir entonces $Y_{1/2,-1/2}(\theta, \phi)$ de dos maneras diferentes:

   a) aplicando L_- a $Y_{1/2,1/2}(\theta, \phi)$,

   b) usando que $L_-\, Y_{1/2,-1/2}(\theta, \phi) = 0$.

   Muestre que los dos procedimientos llevan a resultados contradictorios (esto da un argumento en contra de valores semi-enteros de l al menos para $l = 1/2$).

21. *a*) Considere un sistema con $j = 1$. Escriba explícitamente
$$\big\langle j = 1, m' | J_y | j = 1, m \big\rangle$$
como matriz de 3×3.

   b) Muestre que en el caso particular $j = 1$, es legítimo reemplazar $e^{-iJ_y\beta}$ por
$$1 - iJ_y \sin\beta - (J_y)^2\,(1 - \cos\beta)\,.$$

   c) Se suele definir el elemento de matriz $d^{(j)}_{m'm}(\beta) := \langle j, m' | e^{-iJ_y\beta} | j, m\rangle$. Usando (b) obtenga
$$d^{(j=1)}(\beta) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)(1+\cos\beta) & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta & \left(\frac{1}{2}\right)(1-\cos\beta) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta & \cos\beta & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta \\ \left(\frac{1}{2}\right)(1-\cos\beta) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta & \left(\frac{1}{2}\right)(1+\cos\beta) \end{pmatrix}.$$

22. La función de onda de una partícula sujeta a un potencial esféricamente simétrico $V(r)$ está dada por:
$$\Psi(x) = (x + y + 3\,z)\, f(r)\,.$$

a) ¿Es Ψ autofunción de L^2? Si es así, ¿cuál es el valor de l? Si no es así, ¿cuáles son los posibles valores de l que pueden ser obtenidos cuando se mide L^2 ?

b) ¿Cuáles son las probabilidades de hallar a la partícula en los distintos estados con m definido?

c) Suponga que se conoce de alguna manera que $\Psi(x)$ es una autofunción de energía con autovalor E. Indique cómo puede hallarse $V(r)$.

23. Para una partícula sometida a un potencial de oscilador armónico tridimensional isótropo (suponga que todos los parámetros de longitud y energía valen 1) considere el estado definido por

$$\psi(x,y,z) = C(1+x+y)\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right), \quad C = \frac{1}{\pi^{3/4}\sqrt{2}} .$$

Calcule qué valores pueden medirse y con qué probabilidad de las siguientes magnitudes: L^2, L_z, L_x, y H.

24. Se colocan dos Stern-Gerlach en serie, el segundo rotado un ángulo α respecto al primero. Incide un haz de partículas no polarizado de espín 1. ¿Qué fracción de éste atravesará el sistema sin desviarse?

Osciladores de Schwinger

25. Considerar dos pares de osciladores: $\left\{a_+, a_+^\dagger\right\}$ y $\left\{a_-, a_-^\dagger\right\}$ con las reglas de conmutación usuales y donde cualquier operador $+$ conmuta con cualquier operador $-$ (se dice entonces que están desacoplados). Considerar también los operadores número $N_\pm = a_\pm^\dagger a_\pm$. Denotamos a los estados con número definido como $|n_+, n_-\rangle$. Mostrar que

a) $|n_+, n_-\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{n_+}(a_-^\dagger)^{n_-}}{\sqrt{n_+! n_-!}}|0,0\rangle$, donde $|0,0\rangle$ es aniquilado por a_- y a_+.

b) Si se definen $J_+ := a_+^\dagger a_-$, $J_- := a_-^\dagger a_+$ y $J_z := \frac{1}{2}(N_+ - N_-)$, entonces estos operadores satisfacen las reglas de conmutación usuales de los operadores de subida, bajada y componente $\hat{z}$ de los generadores de rotaciones. Concluya que los autovalores de J_z deben ser semi enteros: $m = (n_+ - n_-)/2$.

c) Si $N := N_+ + N_-$ entonces $J^2 = \frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right)$. Se ve que $j = n/2$ es semi entero, con n autovalor de N.