<u>Física Teórica 2</u>

Segundo cuatrimestre de 2016
Guía: Simetrías

1. Sea $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ el operador de traslación con vector despazamiento $\mathbf{d}$, $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}, \phi)$ el operador de rotación ($\hat{\mathbf{n}}$ y ϕ son respectivamente el eje y el ángulo de rotación), y Π el operador de paridad. ¿Cuáles de los siguientes pares de operadores conmutan? ¿Por qué?

   (a) $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ y $\mathcal{T}_{\mathbf{d}'}$ ($\mathbf{d}$ y $\mathbf{d}'$ en distintas direcciones).

   (b) $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}, \phi)$ y $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}', \phi')$ ($\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{n}}'$ en distintas direcciones).

   (c) $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ y Π.

   (d) $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}, \phi)$ y Π.

2. Se sabe que un estado cuántico $|\Phi\rangle$ es simultaneamente autoestado de dos operadores hermíticos A y B que anticonmutan. ¿Qué puede decir sobre los correspondientes autovalores de A y B para este estado? Ilustre el resultado usando el operador paridad y el operador de momentos (utilice que $\Pi = \Pi^{-1} = \Pi^{\dagger}$).

3. Considere dos autoestados del operador paridad

$$\Pi\,|\alpha\rangle = \epsilon_\alpha\,|\alpha\rangle \qquad \Pi\,|\beta\rangle = \epsilon_\beta\,|\beta\rangle \ \ ,$$

   donde los autovalores ϵ_α y ϵ_β pueden ser 1 o -1. Muestre que

$$\langle\beta|\mathbf{x}|\alpha\rangle = 0$$

   salvo si $\epsilon_\alpha = -\epsilon_\beta$. Relacione este resultado con el argumento usual $\int \phi_\beta^* \mathbf{x} \phi_\alpha \mathrm{d}^3\mathbf{x} = 0$ si ϕ_α y ϕ_β tienen la misma paridad. ¿Qué ocurre con $\langle\beta|\mathbf{p}|\alpha\rangle$? ¿Y con $\langle\beta|\mathbf{S}\cdot\mathbf{x}|\alpha\rangle$?

4. Considere la función de onda estacionaria de una partícula sin espín

$$|\alpha l m\rangle = R_\alpha(r) Y_l^m(\theta, \phi) \ .$$

   ¿Qué puede decir del $V(\mathbf{r})$ en que se encuentra la partícula? Usando las expresiones de los armónicos esféricos, muestre que frente a la transformación de paridad $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$, el estado se transforma como

$$\Pi\,|\alpha l m\rangle = (-1)^l\,|\alpha l m\rangle \ \ .$$

   ¿Qué puede decir de las propiedades de conmutación de Π y $\mathbf{L}$?

5. Una partícula de espín $1/2$ está ligada a un centro fijo por un potencial esféricamente simétrico. Considere las funciones espín-angulares,

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_l^{j=l\pm 1/2, m} &= \pm\sqrt{\frac{l \pm m + 1/2}{2l+1}} Y_l^{m-1/2}(\theta,\phi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{l \mp m + 1/2}{2l+1}} Y_l^{m+1/2}(\theta,\phi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{l \pm m + 1/2}\, Y_l^{m-1/2}(\theta,\phi) \\ \sqrt{l \mp m + 1/2}\, Y_l^{m+1/2}(\theta,\phi) \end{pmatrix} \ , \end{aligned}$$

   que son autofunciones de L^2, S^2, J^2, y J_z simultaneamente.

   (a) Escriba la función espín-angular $\mathcal{Y}_{l=0}^{j=1/2, m=1/2}$.

(b) Exprese $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x})\mathcal{Y}_{l=0}^{j=1/2,m=1/2}$ en términos de $\mathcal{Y}_l^{j,m}$.

(c) Muestre que el resultado obtenido en (b) se puede interpretar usando las propiedades de transformación de $\mathbf{S} \cdot \mathbf{x}$ ante rotaciones e inversión espacial (paridad).

6. Debido a interacciones débiles existentes entre los electrones atómicos y el núcleo, se puede tomar un potencial que viola paridad de la siguiente forma:

$$V = \lambda[\delta^3(\mathbf{x})\mathbf{S} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}\delta^3(\mathbf{x})] \ ,$$

donde $\mathbf{S}$ y $\mathbf{p}$ son los operadores de espín y de momento del electrón respectivamente, y se supone que el núcleo está ubicado en el origen de coordenadas. Como resultado, el estado fundamental de un átomo alcalino, usualmente caracterizado por $|n, l, j, m\rangle$, en realidad contiene pequeñas contribuciones provenientes de otros autoestados en la siguiente manera:

$$|n, l, j, m\rangle \to |n, l, j, m\rangle + \sum_{n'l'j'm'} C_{n'l'j'm'} \left|n', l', j', m'\right\rangle \ .$$

Usando solamente consideraciones de simetría, ¿qué puede decir acerca de los (n', l', j', m') que dan contribuciones no nulas? Suponga que las funciones de onda radiales y los niveles de energía son conocidos. Indique como calcularía los $C_{n'l'j'm'}$. ¿Se obtienen más restricciones acerca de los (n', l', j', m')?

7. Sea una partícula sometida a un potencial de oscilador armónico cuyo estado inicial a $t = 0$ es el estado coherente

$$|\beta\rangle = e^{-|\beta|^2/2} \sum_{n=0} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \ ,$$

donde $\beta \in \mathbb{C}$.

(a) Se mide el operador paridad Π a $t = 0$ obteniéndose el autovalor $+1$. ¿Cuál es el estado $|\psi\rangle$ del sistema a tiempo $t > 0$?

(b) ¿Qué valores puede tomar a $t > 0$ el operador H y con qué probabilidad? ¿Cuál es el estado a un tiempo posterior? ¿Cuál es el primer estado excitado? ¿Qué resultados posibles daría la medición de Π?

8. Evalúe los siguientes elementos de matriz. Si alguno se anula, explique por qué usando argumentos de simetría.

(a) $\langle n = 2, l = 1, m = 0|x|n = 2, l = 0, m = 0\rangle$.

(b) $\langle n = 2, l = 1, m = 0|p_z|n = 2, l = 0, m = 0\rangle$.

(c) $\langle L_z\rangle$ para un electrón en un campo central con $j = 9/2$, $m = 7/2$, y $l = 4$.

En (a) y (b), $|nlm\rangle$ son los autoestados de energía del átomo de hidrógeno ignorando los efectos de espín.