# Física Teórica 2

Segundo cuatrimestre de 2016
**Guía** : Matriz densidad y sistemas compuestos

1. Sobre un sistema se mide cierta magnitud $A$. El valor medio de los resultados de la medición $\langle A\rangle$ tiene una probabilidad $p_n$ de ser igual a $\langle A\rangle_n$, donde

$$\langle A\rangle_n = \langle n|A|n\rangle \ ,$$

y donde $\{|n\rangle\}$ es una base ortonormal. La mezcla estadística de los estados dinámicos representados por los kets $|n\rangle$ se puede describir mediante el operador densidad

$$\rho = \sum_n |n\rangle\, p_n \,\langle n| \ .$$

donde $\sum_n p_n = 1$, y $p_n \geq 0$ para todo $n$.

   *a*) Demuestre que el valor medio del observable $A$ es la traza de $\rho A$, es decir

   $$\langle A\rangle = \mathrm{Tr}(\rho A) \ .$$

   Generalize el resultado para cualquier $\mathrm{F}(A)$.

   *b*) Demuestre que $\rho$ es hermítico.

   *c*) Demuestre la condición de normalización $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$.

2. Considere la matriz densidad $\rho$ de un espacio de estados de dimensión 2, cuyos elementos están dados por

$$\rho_{ij} = \frac{1}{2} \qquad \text{para todo } i, j \in \{1, 2\}$$

y sea $\{|\psi_i\rangle\}$ la base elegida para representar al estado.

   *a*) Determinar si el estado representado por $\rho$ es un estado mixto o un estado puro.

   *b*) Escribir los vectores $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ en términos de aquéllos vectores que conforman la base en la cual la matriz densidad es diagonal.

   *c*) ¿Es siempre posible diagonalizar la matriz densidad? Justifique su respuesta.

3. Para los siguientes sistemas de espín 1/2, escriba el operador densidad, y la matriz densidad en la base $\{|+\rangle\,, |-\rangle\}$.

   *a*) Un haz completamente polarizado con $S_z+$.

   *b*) Un haz completamente porarizado con $S_x+$.

   *c*) Un haz no polarizado, formado por una mezcla incoherente de $S_x+$ y $S_x-$ en igual cantidad ($50\,\%$).

   *d*) Un haz parcialmente polarizado, formado por una mezcla incoherente con $75\,\%$ de $S_z+$ y $25\,\%$ de $S_x+$.

   Para los casos (c) y (d), calcule los valores medios estadísticos $\langle S_x\rangle$, $\langle S_y\rangle$ y $\langle S_z\rangle$.

4. Considere dos conjuntos estadísticos de sistemas de espín $1/2$ $A$ y $B$. El primero se encuentra en un estado puro $|\psi_A\rangle = |S_z, +\rangle$, y el segundo en el estado puro $|\psi_B\rangle = |S_x, +\rangle$. Se realiza una medición de $S_x$ sobre el sistema $A$ y otra de $S_z$ sobre el sistema $B$, pero en ninguno de los dos casos se observa el resultado.

*a*) Escriba explicitamente $\rho_A$ y $\rho_B$ luego de las mediciones, en representación $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ y verifique que describen estados mezcla.

*b*) ¿Cómo se relacionan $\rho_A$ y $\rho_B$?

5. *a*) Pruebe que la evolución temporal del operador densidad $\rho$ en el esquema de Schrödinger está dada por

$$\rho(t) = U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0) \ ,$$

donde $U(t, t_0)$ es el operador de evolución temporal.

*b*) A partir de la ecuación de Schrödinger para el operador $U(t, t_0)$, encuentre la ecuación de Schrödinger para el operador densidad. ¿Cuál es la diferencia fundamental con la correspondiente ecuación de Heisenberg?

*c*) Suponga que a $t = 0$ tiene un estado puro. Muestre que el estado no puede evolucionar a uno mixto si la evolución temporal está descripta por la ecuación de Schrödinger. Muestre que esta imposibilidad resulta solo del hecho de tener una evolución unitaria. Nota: este es un ingrediente esencial en la paradoja de pérdida de información en agujeros negros formulada por Stephen Hawking, donde un estado puro parecería evolucionar a uno mixto (apareciendo así la radiación de Hawking) a medida que el agujero negro se avapora (porque irradia).