

**Importante:** es condición necesaria para la aprobación que todos los pasos estén claramente justificados. Si considera que hay alguna expresión que necesita y no tiene como deducirla rápidamente levante la mano y solicítela. Resuelva cada ejercicio en hojas separadas y **sea claro**. Se aprueba con 6/10.

1. (3.5 puntos) Considere una partícula de spin 1/2 con el Hamiltoniano

$$H_0 = \omega S_z + \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

- a) Encontrar los estados estacionarios y sus energías. En particular, muestre que el estado de menor energía es uno solo pero que el primer nivel excitado está degenerado.  
 b) Se agrega ahora una perturbación dada por

$$H_1 = \lambda\omega (aS_+ + a^\dagger S_-)$$

con  $\lambda \ll 1$ . Encuentre las correcciones a la energía de los dos niveles más bajos a primer orden.

- c) Encuentre ahora la corrección al estado fundamental y a los estados del primer nivel excitado a primer orden.

2. Considere un átomo de hidrógeno con autoestados  $|n, l, m_l, 1/2, m_s\rangle = |n, l, m_l\rangle \otimes |m_s\rangle$  y asuma conocidas sus energías  $E_n$ . En  $t = 0$  se encuentra en el estado

$$|i\rangle = c_1|4, 3, 1\rangle \otimes |-\rangle + c_2|3, 2, 0\rangle \otimes |+\rangle$$

y comienza a ser sometido a una perturbación que depende armónicamente del tiempo, dada por un potencial de interacción

$$V(t) = V_0(r)(Y_1^1 + Y_{-1}^1) \otimes S_x \cos(\omega t) .$$

- a) Calcule la probabilidad de obtener los siguientes estados finales luego de un tiempo  $\tau$  a primer orden en la teoría de perturbaciones (deje expresado el resultado en términos de elementos de matriz que no pueda calcular). Ayuda: tenga en cuenta argumentos de simetría.

- 1)  $|f\rangle = |4, 1, -1\rangle \otimes (\alpha|+\rangle + \beta|-\rangle)$   
 2)  $|f\rangle = |4, 0, 0\rangle \otimes (\alpha|+\rangle + \beta|-\rangle)$   
 3)  $|f\rangle = |4, 2, -1\rangle \otimes (\alpha|+\rangle + \beta|-\rangle)$ .

Donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes conocidas.

- b) Suponga la transición primera del ítem anterior. Calcule nuevamente para el caso de resonancia, donde  $\hbar\omega$  coincide con la diferencia de energía  $E_f - E_i$ . Explique si la teoría a primer orden deja de valer en este caso.

3. (3 puntos) Considere un átomo de dos electrones, uno en el estado  $1s$  ( $n = 1$  y  $l = 0$ ) y otro en el estado  $3d$  ( $n = 3$  y  $l = 2$ ). Tenga en cuenta que los electrones son fermiones de espín 1/2 y desprecie la interacción entre electrones.

- a) Indique qué valores se pueden obtener si se mide  $J$  total (suma de todos los posibles momentos angulares).  
 b) Para el caso de un electrón en el estado  $1s$  y el otro en el estado  $3d_{+2}$  ( $n = 3, l = 2$  y  $m = 2$ ), escriba las funciones de onda con la simetría adecuada.  
 c) Se tiene **estadísticamente** 1/3 de probabilidad de tener el estado con  $S = 0$  y  $m = 2$  y 2/3 de probabilidad de tener el estado con  $S = 0$  y  $m = 1$ .  $S$  es el espín total. i) Escriba el operador densidad correspondiente y ii) calcule el valor medio del observable  $J_x$  (con  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ ).

## Algunas expresiones que podrían (quizás) resultar útiles

1. Estado corregido a primer orden, donde  $D_n$  es el subespacio de energía  $E_n^{(0)}$ :

$$|\psi_n^{(1)}, r\rangle = \sum_{m \notin D_n} \frac{|m\rangle \langle m|V|\psi_n^{(0)}, r\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

2. Operador de bajada:  $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x + ip)$
3.  $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$ ,
4.  $J_{\pm}|j m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|j m \pm 1\rangle$
5. La base esférica de tensores irreducibles  $T^{(k)}$  se define como la que satisface:

$$[L_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)}, \quad [L_{\pm}, T_q^{(k)}] = \hbar\sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)} T_{q \pm 1}^{(k)}$$

6. Teorema de Wigner-Eckart:

$$\langle n' \ell' m' | T_q^{(k)} | n \ell m \rangle = \langle k \ell; q m | k \ell; \ell' m' \rangle \langle n' \ell' || T^{(k)} || n \ell \rangle$$

## 34. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND $d$ FUNCTIONS

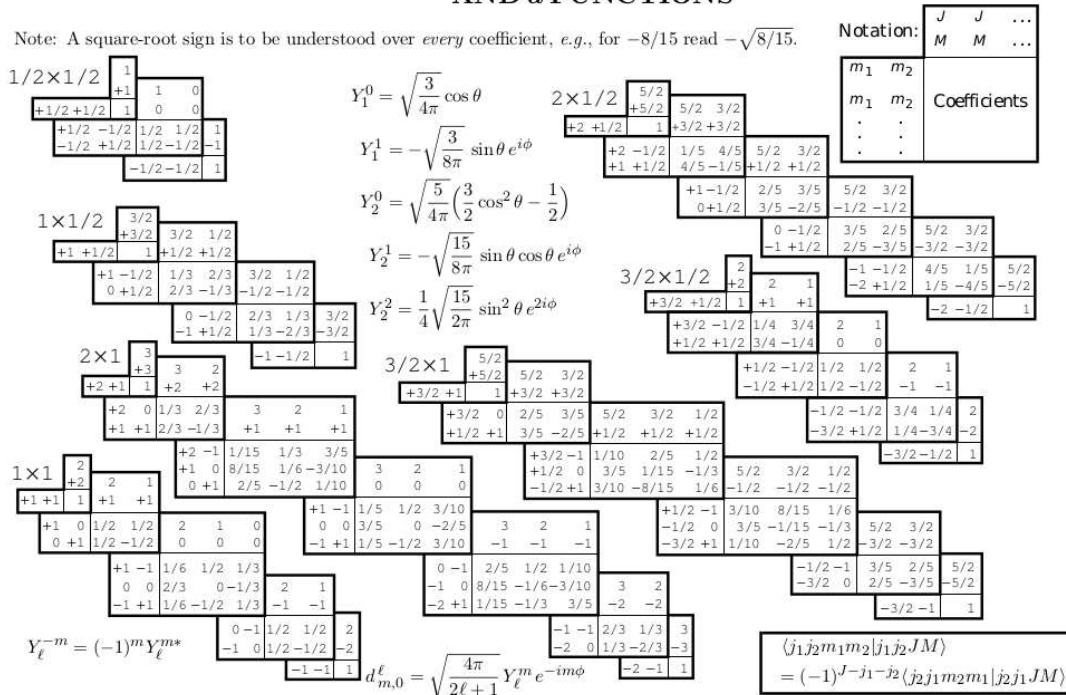


Figura 1: Recorte de tabla de Clebsch-Gordan