

Partículas Idénticas

¿A qué llamamos partículas idénticas? A aquellas partículas cuyas propiedades intrínsecas son idénticas. Es decir aquellas con igual masa, carga, spin, etc. Propiedades que son propias de las partículas y que puede haber varias que tenga las mismas. Por ejemplo los electrones, protones, neutrones, etc. Cada electrón es idéntico a otro, y así con cada tipo. Claro, las propiedades dinámicas (extrínsecas) de estas partículas pueden ser distintas. Aun siendo idénticas, pueden tener distintas posiciones, distintas velocidades, la proyección del spin puede diferir en una orientación u otra, su energía puede ser distinta, etc.

Pero, ¿por qué necesitamos hablar de modo especial de partículas idénticas en mecánica cuántica? Es decir, ¿cómo difiere en mecánica cuántica, la noción clásica de partícula idénticas? En el caso de la física clásica, no hay problema en el tratamiento de las partículas idénticas. Por ejemplo, si uno considera dos partículas idénticas en distintos lugares del espacio de fase, puede etiquetar a cada una, distinguiéndolas y seguir su trayectoria en toda su evolución. Es decir, las condiciones iniciales en física clásica nos permite “etiquetar” a cada partícula con propiedades intrínsecas idénticas y así distinguirlas en toda su dinámica.

En mecánica cuántica esto no es así. Pensemos en una partícula que se mueve en una dimensión, descrita inicialmente por la función de onda $\langle x|\psi_1\rangle$ y otra que es descrita por $\langle x|\psi_2\rangle$. Y supongamos que las funciones de onda son suficientemente distintas como para poder distinguirlas inicialmente. La funciones de onda de dos partículas siempre se superponen, pero supongamos primero que esta superposición es despreciable y podemos inicialmente distinguirlas con alta probabilidad. Cuando estas partículas evolucionen, puede que las funciones de onda se desparramen y ambas sean notablemente no nulas en una misma región del espacio. Esto nos quiere decir que, si hiciera el experimento de poner un detector en

ese lugar del espacio, y detectara una partícula, nunca sabré cual de las dos estoy detectando.

Veamos otro un ejemplo sencillo. Tengo dos partículas una inicialmente con espines opuestos $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, ambas pasan por un selector de Stern-Gerlach que separa a las partículas en la base $|\pm\rangle$. Si pongo detectores en la salida, podré detectar ambas de un lado o el otro (con probabilidad $1/4$ cada opción) o una en cada detector, con (probabilidad $1/2$). Sin embargo, en ninguno de los casos podré decir qué partícula termino en cada detector, sino que una terminó en cada uno o que terminaron las dos en alguno de los dos.

En mecánica cuántica solo tiene sentido decir tengo una partícula en el estado $|\psi_1\rangle$ y otra, idéntica en el estado $|\psi_2\rangle$. Pero *no* tiene sentido decir, la partícula 1 esta en el estado $|\psi_1\rangle$ y la partícula 2 en el estado $|\psi_2\rangle$.

Veremos en este capítulo como trabajar con esta dificultad y algunas propiedades especiales que aparecen por esta indeterminación.

21.1. Revisión del Postulado 1 - Simetrización

Cuándo enunciamos el postulado 1 de la mecánica cuántica dijimos “El estado de todo sistema físico está representado por un vector (de norma unidad) en un espacio de Hilbert \mathcal{H} .” Al agregar más grados de libertad u otras partículas distinguibles a estos sistemas, lo hicimos mediante el producto tensorial de cada parte. Por ejemplo, estudiamos las correlaciones entre dos partículas distantes haciendo describiendo su espacio conjunto como del producto tensorial de los subespacios que describían a cada una. En ese caso, supusimos que había una etiqueta que nos permitía distinguirlos en todo momento. Pero, ¿qué pasa si no fuera así? ¿Qué pasa si no podemos asignarle una etiqueta en todo momento a dos o más partículas idénticas?

Veremos que el espacio de Hilbert que describe dos partículas idénticas contiene demasiadas posibilidades y tendremos que restringirnos a alguna parte de él cuándo hablemos de partículas idénticas.

Haremos un razonamiento por el absurdo. Supongamos que el espacio conjunto de las partículas es en efecto $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$. En tal caso, supongamos ahora que una partícula está en el estado $|\chi\rangle$ y otra en el estado $|\xi\rangle$. ¿Como escribimos el estado conjunto de ambas? Tenemos una infinidad de maneras de hacerlo. Es decir, en \mathcal{H}_{12} hay infinitos vectores que describen esta situación. Por ejemplo los estados producto $|\chi\rangle_1 \otimes |\xi\rangle_2$ y $|\xi\rangle_1 \otimes |\chi\rangle_2$ describen a una partícula en cada uno de esos estados. Si las partículas son idénticas, estos dos vectores, que son distintos, representan la misma situación física. Más aún, también describirá la misma situación cualquier combinación lineal normalizada de la forma $\alpha|\chi\rangle_1 \otimes |\xi\rangle_2 + \beta|\xi\rangle_1 \otimes |\chi\rangle_2$. Si las partículas no fueran idénticas, o tuvieran algún grado de libertad que la distinguiera, todas estas posibilidades representan estados distintos. En cambio, si ambas son realmente indistinguibles, todos estos vectores representan el mismo estado. Pero entonces, ¿con cuál nos quedamos? En lo que sigue responderemos a esta pregunta.

El problema de la multiplicidad de posibles descripciones se conoce como *degeneración de intercambio*. Y su solución, está en el mismo nombre. La idea es que, si las partículas son efectivamente indistinguibles, el estado debe mantenerse invariante frente a cambios en las “etiquetas que las identifican”. Es decir, debemos agregarle algo al postulado número 1. Este agregado no vendrá de la matemática, sino de la naturaleza.

Resulta que experimentalmente uno puede comprobar que las partículas pueden ser de dos tipos distintos. Estos dos tipos, que llamamos Bosones y Fermiones, son descritos por funciones de onda simétricas/antisimétricas correspondientemente. En este sentido ampliamos el postulado 1 diciendo:

Postulado 1 (Bosones) *Los estados de Bosones están descritos por vectores en el espacio de Hilbert que son **invariantes** frente a cualquier permutación de partículas.*

y

Postulado 1 (Fermiones) *Los estados de Fermiones están descritos por vectores en el espacio de Hilbert que son **antisiméticos** frente a cualquier permutación de partículas.*

¿Qué partículas serán Bosones y qué otras serán Fermiones? Hay un teorema, que enunciamos sin demostración, que nos dice que todas las partículas de spin entero son Bosones y las de spin semi-entero serán Fermiones.

Volvamos al ejemplo anterior de dos partículas y escribamos las funciones de onda correspondientes para cada caso. Si $|\chi\rangle$ y $|\xi\rangle_2$ son ortogonales tenemos que, para cada caso:

$$\overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(|\chi\rangle_1 \otimes |\xi\rangle_2 + |\xi\rangle_1 \otimes |\chi\rangle_2)}^{\text{Bosones}} \quad \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(|\chi\rangle_1 \otimes |\xi\rangle_2 - |\xi\rangle_1 \otimes |\chi\rangle_2)}^{\text{Fermiones}} \quad (21.1)$$

Como podemos ver, por simple inspección, la permutación de las partículas en el caso de los Bosones no cambia el estado, lo mantiene invariante. En contraposición, para el caso de los Fermiones, el vector cambia de signo, es antisimétrico. Esto tiene profundas implicaciones físicas. Y fue a partir de observar los efectos de esta (anti)simetría, que se formuló esta extensión al postulado 1.

Principio de Exclusión de Pauli El postulado de antisimetrización comenzó a formularse cuando se intentó utilizar el modelo del átomo de Bohr para describir átomos multi-electrónicos. Recordemos que el modelo de Bohr describe formalmente al átomo de hidrógeno. ¿Qué pasa si queremos incluir más electrones? ¿Como podemos acomodarlos en capas y cual será su estado fundamental? Ingenuamente uno podría creer que el estado fundamental de un átomo multi-electrónico es aquel en que todos los electrones están en el estado energético más bajo. Pero esto no es lo que ocurre.

Para explicar la organización de electrones en capas, hace falta asumir que no puede haber dos paríduclas en un mismo estado. Esto es justamente lo que pasó con los Fermiones. En efecto, utilizando el postulado 1 con antisimetría, vemos que no podemos tener dos Fermiones en el mismo estado, ya que este estado es nulo:

$$(|\chi\rangle_1 \otimes |\chi\rangle_2 - |\chi\rangle_1 \otimes |\chi\rangle_2) = 0. \quad (21.2)$$

Esta propiedad se conoce como el “Principio de exclusión de Pauli” y afirma que dos Fermiones no pueden estar en el mismo estado.

En este caso, primero vino, la observación de que nunca había dos electrones en el mismo estado y luego la formulación matemática de este problema.

Aglutinamiento y condensados de Bosones Con los Bosones pasa lo opuesto. A los Bosones “les gusta” estar en el mismo estado. En efecto, vemos primero que esto es posible ya que

$$\frac{1}{2}(|\chi\rangle_1 \otimes |\chi\rangle_2 + |\chi\rangle_1 \otimes |\chi\rangle_2) = |\chi, \chi\rangle \neq 0. \quad (21.3)$$

En este sentido, podemos decir, que si tenemos un sistema con muchos Bosones, estos tenderán a estar agrupados, aglutinados, en el estado fundamental.

Este fenómeno da lugar a los “condensados de Bose-Einstein” en los que, a suficiente baja temperatura un conjunto grande de Bosones *condensa* a un estado común en el que todas los átomos se vuelven indistinguibles y están en el estado fundamental.

Otro efecto espectacular que sufren estas partículas se conoce como aglutinamiento (o *bunching*, en inglés) y podemos describir así: si dos Bosones “chocan”, este choque es siempre un choque *plástico*, es decir, los Bosones se pegan, se aglutinan, nunca rebotan.

En este caso, al contrario del anterior, primero vino la observación matemática, y luego llegaron los experimentos para confirmarla.

21.2. Simetrización y antisimetrización

Para justificar estas ideas con un poco más de precisión introduciremos los operadores de simetrización y antisimetrización. (En lo que sigue, utilizaremos en modo más compacto de escribir el producto tensorial $|\chi\rangle_1 \otimes |\xi\rangle_2 \rightarrow |\chi, \xi\rangle$, donde omitimos el producto \otimes y los subíndices.)

Podemos definir un operador P_{12} que llamaremos de permutación que opera cambiando el estado de un par de partículas etiquetadas como 1 y 2:

$$P_{12}|\xi, \chi\rangle = |\chi, \xi\rangle. \quad (21.4)$$

Con este operador, podemos construir otros dos operadores S y A que llamaremos de simetrización y antisimetrización y definimos de la siguiente manera:

$$S = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + P_{12}) \quad (21.5)$$

$$A = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - P_{12}) \quad (21.6)$$

Estos dos operadores son proyectores, es decir $A^2 = S^2 = \mathbb{1}$, ya que $P_{12}^2 = \mathbb{1}$. El subespacio sobre el que cada uno proyecta es el subespacio simétrico/antisimétrico correspondiente a ese estado. En efecto podemos ver que, para cualquier estado $|\psi\rangle$:

$$P_{12}S|\psi\rangle = \frac{1}{2}(P_{12} + P_{12}^2)|\psi\rangle = S|\psi\rangle \quad (21.7)$$

$$P_{12}A|\psi\rangle = \frac{1}{2}(P_{12} - P_{12}^2)|\psi\rangle = -A|\psi\rangle \quad (21.8)$$

En este sentido, podemos usar estos operadores para generar los estados simétricos o antisimétricos correspondientes a un estado sin simetría definida.

De este modo podemos escribir la forma general de obtener un estado bosónico o fermiónico de la siguiente manera:

$$\overbrace{kS|\xi, \chi\rangle}^{\text{Bosones}} = \frac{k}{2}(|\chi, \xi\rangle + |\xi, \chi\rangle) \quad \overbrace{kS|\xi, \chi\rangle}^{\text{Fermiones}} = \frac{k}{2}(|\chi, \xi\rangle - |\xi, \chi\rangle), \quad (21.9)$$

dónde la constante k es un factor de normalización que dependerá de los estados $|\chi\rangle$ y $|\xi\rangle$.

21.2.1. Propiedades de Bosones y Fermiones

Mostraremos ahora los principios de exclusión y de aglutinamiento utilizando estos operadores. Imaginemos que tenemos, como antes dos partículas que se mueven en tres dimensiones descriptas por los vectores $|\chi\rangle$ y $|\xi\rangle$. Nuestro objetivo será calcular la probabilidad $P(x_a, x_b)$ de medir a una partícula en la posición x_a y otra en la posición x_b . Esperamos que si $x_a = x_b$ la probabilidad para Fermiones sea nula y para Bosones, más de lo que obtendríamos si fueran distinguibles. Veamos.

Para calcular esta probabilidad lo haremos como indican los postulados. En este caso debemos simetrizar tanto la función de onda, como el vector de las coordenadas. Tenemos entonces que, a menos de un factor de normalización, para el caso de Bosones,

$$\begin{aligned} P_B(x_a, x_b) &\propto |\langle x_a, x_b | S S | \chi, \xi \rangle|^2 \\ &\propto |\langle x_a, x_b | S | \chi, \xi \rangle|^2 \\ &\propto |\langle x_a, x_b | (|\chi, \xi\rangle + |\xi, \chi\rangle) \rangle|^2 \\ &\propto |\chi(x_a)\xi(x_b) + \xi(x_a)\chi(x_b)|^2 \\ &\propto |\chi(x_a)|^2|\xi(x_b)|^2 + |\chi(x_b)|^2|\xi(x_a)|^2 + 2\Re(\chi(x_a)\xi(x_b)\chi(x_b)^*\xi(x_a)^*). \end{aligned} \quad (21.10)$$

Dónde hemos usado que $\chi(x) = \langle x|\chi \rangle$ y $\xi(x) = \langle x|\xi \rangle$.

Equivalentemente, para Fermiones una expresión análoga, pero con un signo menos frente a el último termino.

$$P_F(x_a, x_b) \propto |\chi(x_a)|^2 |\xi(x_b)|^2 + |\chi(x_b)|^2 |\xi(x_a)|^2 - 2\Re(\chi(x_a)\xi(x_b)\chi(x_b)^*\xi(x_a)^*). \quad (21.11)$$

Analicemos estas expresiones.

Los dos primeros términos, que aparecen iguales para ambas, son los que uno esperaría si las partículas fueran distinguibles. Son el resultado que uno esperaría si considerara la mezcla estadística entre las dos opciones $|\chi, \xi \rangle$ y $|\xi, \chi \rangle$. Es decir, desconocer qué partícula está representada por qué vector, pero en principio poder identificarlas, como pasa en el caso clásico.

El tercer término ya es más interesante y es el que cambia dependiendo de si las partículas son Bosones o Fermiones. Para entender su significado veamos un caso concreto.

Si consideramos la probabilidad de medir a ambas partículas en el mismo punto, es decir $x_a = x_b$ obtenemos resultados muy distintos en cada caso. Para los Fermiones vemos que esta probabilidad se anula, en efecto $P_F(x_a, x_b = x_a) = 0$. Esto es lo que da a lugar al, ya mencionado, principio de exclusión de Pauli. ¡No puede haber dos fermiones en el mismo lugar! Algo similar pasa si elegimos $\xi(x) = \chi(x)$. Si los estados son iguales, la función de onda fermiónica se anula. Es decir, ¡no puede haber dos Fermiones en el mismo estado ¹!

Por el contrario, para Bosones, vemos que la probabilidad de encontrar a ambas partículas en el mismo lugar no se anula es $P_B(x_a, x_b = x_a) \propto 4|\chi(x_a)|^2 |\xi(x_a)|^2$. En efecto, este valor es más alto del que esperaríamos clásicamente. Escribiendo las normalizaciones correspondientes clásicamente tenemos que $P(x_a, x_b = x_a) = |\chi(x_a)|^2 |\xi(x_a)|^2$ mientras que para bosones obtenemos que:

$$P_B(x_a, x_b = x_a) = \frac{2}{1 + |c|^2} |\chi(x_a)|^2 |\xi(x_a)|^2, \quad (21.12)$$

dónde $|c|^2$ es un número real entre 0 y 1 determinado por el solapamiento de los los vectores de estado como $c = \langle \xi|\chi \rangle$.

Vemos entonces, que la probabilidad de encontrar a dos Bosones en el mismo lugar es mayor o igual a la clásica. Este incremento en la probabilidad es la que da a lugar a fenómenos como los condensados de Bose-Einstein o el aglutinamiento de Bosones, que discutimos antes.

Podemos hacernos una pregunta similar, para entender estas diferencias mejor. Si detecto una de las partículas en el origen $x_a = 0$, ¿cuál es la probabilidad $P_{F/B}(0, x)$ de detectar a otra en la posición x ? En la figura 21.1 hemos graficado esta probabilidad caso en que las funciones de onda $\chi(x)$ y $\xi(x)$ son dos gaussianas desplazadas a un lado y el otro del origen. Como se puede ver, la probabilidad de

¹Podría haber dos Fermiones distintos en el mismo estado o lugar, a lo que nos referiremos a es dos Fermiones idénticos.

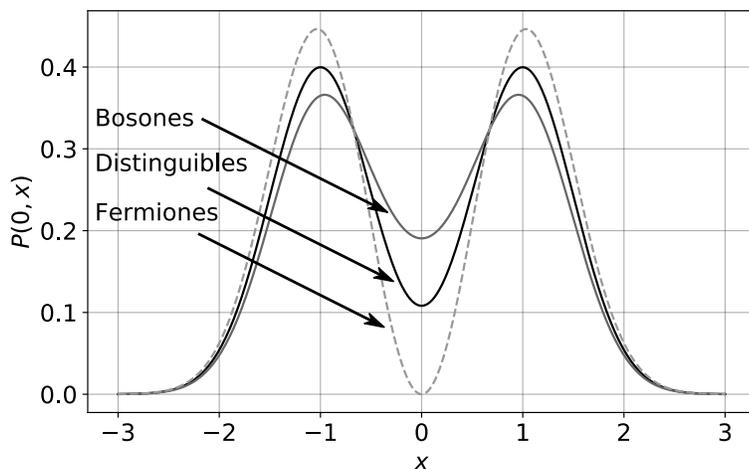


Figura 21.1: Probabilidad de detectar a una partícula en la posición x dado que la primera fue detectada en el origen $x = 0$ para un par de partículas distinguibles, fermiónicas y bosónicas. En los tres casos, se supuso una distribución de función de onda para cada partícula es una gaussiana desplazada a un lado y el otro del origen.

que las dos partículas estén en el origen $x_b = x_a = 0$ es radicalmente distinta para cada caso. Para el caso fermiónico da cero, y para el caso bosónico da más de lo que esperamos para el caso distinguible. Es decir, las probabilidades interfieren destructivamente para Fermiones y constructivamente para Bosones.

21.3. Muchas partículas indistinguibles

¿Qué pasa cuándo tenemos más de dos partículas? Si tenemos N partículas indistinguibles el espacio de Hilbert será el subespacio simético/antisimétrico de el producto estos N espacios de Hilbert.

Para construir los operadores S y A para N partículas debemos primero considerar todas las posibles permutaciones. Tendremos $N!$ permutaciones posibles. Describiremos cada una de estas permutaciones con un vector α que tiene N componentes que pueden ser los número enteros de 1 hasta N en algún orden, sin repetir. Por ejemplo para $N = 4$ podemos tener $\alpha = (2, 1, 4, 3)$ o cualquiera de las 4! combinaciones de esos números.

Utilizando el vector de permutaciones, definimos el operador de permutaciones P_α como aquel que realiza la siguiente permutación:

$$P_\alpha |\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\rangle = |\phi_{\alpha_1}, \phi_{\alpha_2}, \dots, \phi_{\alpha_N}\rangle, \quad (21.13)$$

dónde admitimos que los vectores ϕ_i puedan ser iguales o distintos.

Las permutaciones forman un grupo. Esto quiere decir que cumplen la siguientes propiedades. Si tengo dos permutaciones P_α y P_β , entonces $P_\alpha P_\beta$ es también una permutación. El producto de permutaciones es asociativo, de modo que si tengo

tres permutaciones P_α , P_β y P_γ se cumple que $(P_\alpha P_\beta)P_\gamma = P_\alpha(P_\beta P_\gamma)$. Hay una permutación identidad, que no hace nada, $P_{\mathbb{1}} = \mathbb{1}$ y para cada permutación existe un elemento inverso $P_{\alpha^{-1}}$ que cumple que $P_\alpha P_{\alpha^{-1}} = \mathbb{1}$.

Hay un subconjunto de permutaciones que son más sencillas que el caso general. Una transposición P_{ij} es una permutación en que se intercambian dos partículas de todas las posibles. Es evidente que cualquier permutación P_α puede construirse como un producto de varias transposiciones. Este producto no será único. Lo que sí será característico es la paridad. Es decir una permutación arbitraria se construirá siempre con una cantidad par o impar de transposiciones. Su paridad dependerá de la de α .

Veamos un ejemplo. Para $N = 3$, la permutación determinada por $\alpha_{\text{par}} = (2, 3, 1)$ es par. Podemos comprobar esto construyéndola a partir de dos transposiciones, por ejemplo $P_{(2,3,1)} = P_{13}P_{23}$. También podríamos hacerlo con 4 o 6 transposiciones, pero nunca con una cantidad impar. En cambio, también es inmediato verificar que la permutación $\alpha_{\text{impar}} = (3, 2, 1)$ es impar. Es decir, siempre se construye con un número impar de permutaciones.

Con esto podemos ahora definir los operadores de simetrización y antisimetrización para el caso de muchas partículas. Escribimos

$$S = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} P_{\alpha} \quad (21.14)$$

$$A = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \text{sgn}(\alpha) P_{\alpha}, \quad (21.15)$$

dónde $\text{sgn}(\alpha)$ es el signo de la permutación. Vale 1 si es par y -1 si es impar.

Con estas definiciones podemos probar que estos operadores simetizan / antisimetrizan cualquier vector. En efecto, utilizando las propiedades anteriores, podemos demostrar, para cualquier vector de permutaciones α que

$$P_{\alpha} S |\psi\rangle = S |\psi\rangle \quad (21.16)$$

$$P_{\alpha} A |\psi\rangle = \text{sgn}(\alpha) A |\psi\rangle, \quad (21.17)$$

que muestra que $S|\psi\rangle$ es par frente a permutaciones y $A|\psi\rangle$ es impar. Podemos decir entonces, que S y A son los proyectores a los subespacios simétricos y antisimétricos correspondientemente.

21.3.1. Muchos Fermiones

Construyamos explícitamente el estado de muchos Fermiones a partir de una función de onda no simetrizada $|\phi_1, \dots, \phi_N\rangle$.

En este caso, debemos tener que todos los $|\phi_i\rangle$ deben ser ortogonales. Podemos ver que debemos hacer esta elección ya que si consideráramos quedos de ellos fueran el mismo vector, la función de antisimetrización, anularía el vector.

Escribimos el estado de N Fermiones indistinguibles, a menos de una constante de normalización k cómo:

$$\begin{aligned}
 |\phi\rangle_F &= k\mathbf{A}|\phi_1, \dots, \phi_N\rangle \\
 &= \frac{k}{N!} \sum_{\alpha} \text{sgn}(\alpha) \mathbf{P}_{\alpha} |\phi_1, \dots, \phi_N\rangle, \\
 &= \frac{k}{N!} \sum_{\alpha} \text{sgn}(\alpha) |\phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_N}\rangle,
 \end{aligned} \tag{21.18}$$

De esta expresión podemos calcular el valor de k exigiendo que el estado esté normalizado ${}_F\langle\phi|\phi\rangle_F = 1$ y utilizando la condición de ortonormalidad de $|\phi_i\rangle$ dejamos a los lectores comprobar que $k = \sqrt{N!}$.

Notamos ahora que la expresión 21.18 para el estado de N Fermiones es muy parecida a la fórmula de Leibniz del determinante de una matriz \mathbf{A} de dimensión N , con elementos a_{ij} :

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\alpha} \left(\text{sgn}(\alpha) \prod_{i=1}^N a_{i, \alpha_i} \right). \tag{21.19}$$

En efecto, podemos utilizar esta relación para escribir la función de onda del estado $\langle x_1, \dots, x_N | \phi \rangle_F$ como un determinante de la siguiente manera:

$$\langle x_1, \dots, x_N | \phi \rangle_F = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \begin{pmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \cdots & \phi_N(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \cdots & \phi_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x_N) & \phi_2(x_N) & \cdots & \phi_N(x_N) \end{pmatrix} \tag{21.20}$$

Esta ecuación se conoce como determinante de Slater y es una herramienta clave para resolver la estructura de sistemas de muchos Fermiones, como átomos multi-electrónicos o electrones en sólidos.

21.3.2. Muchos Bosones

De modo similar, podemos escribir el estado de muchos Bosones. En este caso, no hace falta exigir que los vectores $|\phi_i\rangle$ sean ortogonales, ya que el estado resultante no se anulará si lo fueran.

Así, igual que para 21.18, escribimos:

$$\begin{aligned}
 |\phi\rangle_B &= k\mathbf{S}|\phi_1, \dots, \phi_N\rangle \\
 &= \frac{k}{N!} \sum_{\alpha} \mathbf{P}_{\alpha} |\phi_1, \dots, \phi_N\rangle, \\
 &= \frac{k}{N!} \sum_{\alpha} |\phi_{\alpha_1}, \dots, \phi_{\alpha_N}\rangle,
 \end{aligned} \tag{21.21}$$

que en apariencia es más sencilla que su versión fermiónica, pero veremos que tiene sus complicaciones. En primer lugar, calcular la normalización k no es tan

directo. Al permitir que hubiera vectores no ortogonales $|\phi_i\rangle$, el valor de k dependerá de la definición de estos vectores.

Podemos calcular el valor de la normalización k conviene hacer la siguiente elección de bases: eligiéremos a los vectores ϕ_j ortogonales y permitiremos que haya n_j partículas en el estado $|\phi_j\rangle$. Es decir, diremos que el estado $|\phi_j\rangle$ tiene una ocupación n_j . Esta elección no restringe los posibles estados, es una elección que simplemente nos ayudará a calcular la normalización.

Con esta elección podemos escribir el estado bosónico como:

$$|\phi\rangle_B = \frac{k}{N!} \sum_{\alpha} P_{\alpha} \underbrace{|\phi_1, \phi_1, \dots, \phi_1\rangle}_{n_1} \underbrace{|\phi_2, \phi_2, \dots, \phi_2\rangle}_{n_2} \phi_3, \dots, \phi_N \rangle \quad (21.22)$$

Ahora si, de esta expresión, resulta un *poco* más fácil, encontrar el correspondiente factor de normalización. Dejamos a los lectores comprobar que $k = \sqrt{N!} / \sqrt{n_1! n_2! \dots n_N!}$ de modo que escribimos la forma general de un estado de N Bosones como:

$$|\phi\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots n_N! N!}} \sum_{\alpha} P_{\alpha} \underbrace{|\phi_1, \phi_1, \dots, \phi_1\rangle}_{n_1} \underbrace{|\phi_2, \phi_2, \dots, \phi_2\rangle}_{n_2} \phi_3, \dots, \phi_N \rangle \quad (21.23)$$

La suma de todos los permutadores se conoce como *el permanente*, y su forma explícita es más complicada que el determinante, por lo que conviene dejarla así.