> As far as laws of mathematics refer to reality, they are not certain; and as far as they are certain, they do not refer to reality.
>
> *A. Einstein.*

En esta guía trataremos algunos aspectos básicos de matemática que serán útiles a lo largo del curso.

---

7 **Notación de Dirac.** Sea T_v el funcional asociado al vector $|v\rangle$ por el lema de Riesz. Probar que

(a) $T_{|v\rangle+|w\rangle} = \langle v| + \langle w|$.

(b) $T_{\alpha|v\rangle} = \alpha^* \langle v|$.

8 **Propiedades del conmutador.**

(a) Pruebe las siguientes identidades para operadores A, B, C, D en cierto espacio de Hilbert, con $[A, B] := AB - BA$ y $\{A, B\} := AB + BA$.

$$\begin{aligned} 0 &= [A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] \quad \text{(identidad de Jacobi)}\,; \\ [A, B+C] &= [A,B] + [A,C]\,; \\ [A, BC] &= [A,B]C + B[A,C]\,; \\ [A,B] &= \{A,B\} - 2BA\,; \\ [A,BC] &= \{A,B\}C - B\{A,C\}\,. \end{aligned}$$

(b) Suponga que B es tal que conmuta con el conmutador $[A, B]$. Verifique entonces que $[A, B^n] = nB^{n-1}[A, B]$. Utilizar esta propiedad para demostrar que si f es una función analítica, entonces resulta $[f(A), B] = f'(A)[A, B]$.

(c) Dado un operador A, se define formalmente la exponencial de A como

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n\,.$$

Compruebe que $e^{\lambda A}$ es la solución a la ecuación diferencial $h'(\lambda) = Ah(\lambda)$. Además, que si A y B conmutan con $[A, B]$, entonces

$$e^A e^B = e^{A+B+[A,B]/2}\,.$$

Esta es una de las relaciones que se desprenden de la fórmula de Baker-Campbell-Haussdorf. Ayuda: considere la función[1] $g(\lambda) = e^{\lambda A} e^{\lambda B} e^{-\lambda(A+B)}$, demuestre que la misma satisface la ecuación diferencial $\frac{dg}{d\lambda} = \lambda[A, B]g$ y posteriormente resuelva dicha ecuación diferencial. **Importante:** Notar que $\underline{e^A e^B \neq e^{A+B}}$

9 **¿Verdadero o falso?**

(a) La traza de un operador depende de la base en la que se escribe el mismo.

(b) $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$, donde X e Y son operadores.

[1] Esta es una función que toma un número real y lo manda a un operador, es decir, es una función con valores en operadores. Su imagen se puede pensar como una curva en el espacio de operadores.

(c) $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$.

(d) Si A es un operador hermítico con desarrollo espectral $A = \sum_i a_i |i\rangle \langle i|$ y f una función analítica, entonces $f(A) = \sum_i f(a_i) |i\rangle \langle i|$.

(e) $|i\rangle$ y $|j\rangle$ son autoestados de cierto operador hermítico A. Entonces, $|i\rangle + |j\rangle$ también es autoestado de A.

(f) Si dos observables A y B tienen los mismos autovectores $\{|i\rangle\}$ y el conjunto $\{|i\rangle\}$ es una base ortonormal completa del espacio de Hilbert, entonces $[A, B] = 0$.

(g) Si dos operadores hermíticos anticonmutan, entonces es posible hallar un autoestado común a ambos operadores.

(h) El producto interno entre dos vectores no cambia cuando a ambos se los transforma con el mismo operador unitario.

$\boxed{10}$ **Matrices de Pauli.** En un espacio vectorial V de dimensión 2 considere los operadores $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, que en la base ortonormal $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ de V, con

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

se representan mediante las matrices

$$\sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Estas tres matrices se conocen como *matrices de Pauli.*

(a) ¿Son estas matrices hermíticas? Hallar sus autovalores y autovectores en esta base.

(b) Verifique que se satisfacen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \det(\sigma_k) = -1,\ \mathrm{Tr}(\sigma_k) &= 0,\ \sigma_i^2 = I; \\ [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k,\ \{\sigma_i, \sigma_j\} &= 2\delta_{ij} I,\ \sigma_j \sigma_k = i\epsilon_{jkl}\sigma_l + I\delta_{jk}, \end{aligned}$$

donde I representa a la matriz identidad, $k = 1, 2, 3$ ($\equiv x, y, z$), ϵ_{ijk} es la densidad tensorial de Levi-Civita, y δ_{ij} es la delta de Kronecker. En la última identidad se utiliza la notación de suma sobre índices repetidos.

$\boxed{11}$ **Espín 1/2.** Para sistemas de espín 1/2, el operador de espín $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$, se podrá representar en término de las matrices de Pauli tomando $S_j = \frac{\hbar}{2}\sigma_j$ ($j = x, y, z$).

(a) Probar que $[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k$.

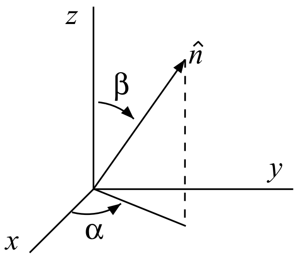
(b) Demostrar que, en la base de autovectores de S_z $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ (correspondientes a los autovalores $\hbar/2$ y $-\hbar/2$, respectivamente), la representación de las componentes del operador de espín está dada por

$$S_x = \frac{\hbar}{2}[|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|], \quad S_y = \frac{i\hbar}{2}[-|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|], \quad S_z = \frac{\hbar}{2}[|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|].$$

(c) Escribir los autovectores de S_x en términos de los de S_z.

(d) Construya, en término de los autovectores de S_z, un estado $|\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}; +\rangle$ tal que

$$\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, |\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}; +\rangle = \frac{\hbar}{2} |\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}; +\rangle$$



donde $\hat{\mathbf{n}}$ está caracterizado por los ángulos que se muestran en la figura.
Nota: la respuesta es $|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle = \cos(\beta/2)\,|+\rangle + \mathrm{sen}(\beta/2)e^{i\alpha}\,|-\rangle$*. En lugar de verificar que esta respuesta satisface la ecuación de autovalores de arriba, resuelva el problema de autovalores planteado. Más adelante veremos una manera más simple de obtener este resultado.*

12 **Matriz de conjugación.** Dada la matriz $J = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\theta \\ -\mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$:

(a) Pruebe que J es unitaria y halle J^{-1}.

(b) Aplique la transformación $B = JAJ^{-1}$ a una matriz simétrica A y verifique que: (i) B es simétrica, (ii) $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$. La transformación $A \mapsto JAJ^{-1}$ se conoce como conjugación.

13 Considere un espacio de Hilbert de dimensión 3. $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ es una base de vectores ortonormales, y en dicha base dos operadores A y B se representan por

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix}$$

donde a y b son reales.

(a) En la representación anterior es sencillo notar que A tiene un espectro degenerado. ¿Lo es también el de B?

(b) Mostrar que A y B conmutan.

(c) Encontrar un nuevo conjunto de estados ortonormales que sean autoestados simultáneos de A y B. Especificar los autovalores de A y B para cada uno de los tres autovectores. ¿Es posible caracterizar completamente a cada autovector por la especificación de estos autovalores?

14 Dos observables A_1 y A_2, que no involucran explicitamente el tiempo, no conmutan ($[A_1, A_2] \neq 0$), pero se sabe que ambos conmutan con el hamiltoniano ($[A_1, H] = [A_2, H] = 0$). Pruebe que debe haber alguna degeneración en los autoestados de energía. Como un ejemplo, puede pensar en el problema de fuerzas centrales $H = p^2/2m + V(r)$, con $A_1 \to L_z$ y $A_2 \to L_x$.

15 **Relación de incerteza generalizada.**

(a) Una forma relativamente sencilla de derivar la desigualdad de Schwarz es la siguiente. Primero observe que

$$(\langle\alpha| + \lambda^*\langle\beta|)\cdot(|\alpha\rangle + \lambda\,|\beta\rangle) \geq 0$$

para cualquier número complejo λ. Luego, elija λ de tal forma que la desigualdad anterior se reduzca a la desigualdad de Schwarz, $\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$.

(b) Para dos observables A y B y un estado cualquiera, demostrar la relación de incerteza de Schrödinger,

$$\left\langle(\Delta A)^2\right\rangle\left\langle(\Delta B)^2\right\rangle \geq \frac{1}{4}\,|\langle[A,B]\rangle|^2 + \frac{1}{4}\,|\langle\{A,B\}\rangle - 2\,\langle A\rangle\langle B\rangle|^2 \ ,$$

donde $\Delta A = A - \langle A \rangle$. Note que la relación de incerteza de Heisenberg se desprende de ésta.

(c) Muestre que el signo igual en la relación de incerteza generalizada se obtiene si el estado en cuestión satisface
$$\Delta A \left|\psi\right\rangle = \lambda \Delta B \left|\psi\right\rangle, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$
Además, concluya que si λ es un imaginario puro entonces se obtiene la igualdad en la relación de incerteza de Heisenberg.

(d) Verificar la relación de incerteza para los operadores $A = S_x$ y $B = S_y$, en el estado $\left|S_x = +\right\rangle$.

16 **Operador de posición en la representación de impulso.** Probar que

(a) $\left\langle p'\right| \hat{x} \left|\alpha\right\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \left\langle p' \middle| \alpha\right\rangle$.

(b) $\left\langle \beta\right| \hat{x} \left|\alpha\right\rangle = \int dp'\, \beta(p')^* \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p'}\right) \alpha(p')$.

17 **Operador de traslación espacial.** El operador de traslación para un desplazamiento espacial **a** finito está dado por
$$\mathcal{T}(\mathbf{a}) = \exp\left(\frac{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}}{\hbar}\right)$$
donde **p** es el operador impulso.

(a) Evalue $[x_i, \mathcal{T}(\mathbf{a})]$.

(b) Muestre que $\mathcal{T}$ es un operador unitario usando que **p** es hermítico.

(c) Usando los puntos anteriores, encuentre cómo cambia el valor de expectación $\langle \mathbf{x} \rangle$ frente a traslaciones (es decir, cuando el estado en cuestión pasa de ser ψ a su trasladado $\mathcal{T}(\mathbf{a})\psi$). El resultado justifica interpretar a $\mathcal{T}(\mathbf{a})$ como el operador de traslaciones espaciales.