A theory with mathematical beauty is more likely to be correct than an ugly one that fits some experimental data.

P. Dirac.

En esta práctica el énfasis estará puesto en entrenar el uso de los postulados de la mecánica cuántica. Veremos además ejemplos de modelos sencillos que permiten explicar la fenomenología de sistemas muy diversos.

---

18 **Fotón en un cristal.** La representación matricial del hamiltoniano correspondiente a un fotón propagándose en dirección del eje óptico de un cristal de cuarzo, usando como base los estados de polarización lineal (normalizados) en las direcciones x e y, $\{|x\rangle, |y\rangle\}$, es

$$\begin{pmatrix} 0 & -iE_0 \\ iE_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } E_0 > 0 .$$

(a) Hallar el espectro de H y los estados de energía definida.

(b) Un fotón ingresa al cristal linealmente polarizado en dirección x a $t = 0$. Encontrar el estado del fotón a todo tiempo posterior y graficar la probabilidad de encontrar al fotón polarizado en la dirección x en función del tiempo.

(c) A $t = t_0 > 0$ se mide la energía y se obtiene la correspondiente al estado fundamental. ¿Qué valores de energía podrán medirse posteriormente y con qué probabilidades? ¿Cómo evoluciona el estado para $t > t_0$?.

19 Un sistema de dimensión 2 está en un autoestado de $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ (ver ejercicio 11 de la guía 1) con autovalor $\hbar/2$, donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario en el plano xz que forma un ángulo γ con el eje positivo z.

(a) Si se mide S_z, ¿cuál es la probabilidad de obtener $\hbar/2$? Verifique que los casos $\gamma = 0, \pi/2$ tienen sentido. Responder la misma pregunta si lo que se mide es S_x.

(b) Suponer ahora que al realizar una medición de S_x se obtuvo el valor $-\hbar/2$. ¿Cuál es la probabilidad de que al medir S_z inmediatamente después se obtenga también $-\hbar/2$?

20 Sean $|\varphi_1\rangle$ y $|\varphi_2\rangle$ autoestados del hamiltoniano H con autovalores E_1 y E_2 respectivamente. A $t = 0$ el estado del sistema es $|\psi_1\rangle = a_1|\varphi_1\rangle + a_2|\varphi_2\rangle$. Muestre que el valor medio para $t > 0$ de un operador B arbitrario varía armónicamente en el tiempo con frecuencia $\nu = |E_2 - E_1|/h$. Note que el período de esta oscilación satisface $|E_2 - E_1|\,\tau = h$.

21 **Precesión del espín.** El hamiltoniano de un sistema de espín 1/2 en un campo magnético externo uniforme B en la dirección z está dado por

$$H = -\left(\frac{eB}{mc}\right) S_z = -\omega S_z \, .$$

(a) Verificar que los autoestados de S_z $|+\rangle$ y $|-\rangle$ son también autoestados de la energía, y calcular los correspondientes autovalores.

(b) Suponer que a $t = 0$ el sistema se encuentra en el estado $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$ (que corresponde al estado $|S_x, +\rangle$). Hallar la evolución temporal $|\alpha(t)\rangle$ de dicho estado. ¿Qué resultados pueden obtenerse al medir S_x a un tiempo posterior? ¿Con qué probabilidades?

(c) Calcular $\langle S_x \rangle$ y $\langle S_y \rangle$ en función del tiempo (Esta rotación de los valores de expectación da cuenta de la *precesión del espín*).

(d) Encontrar el versor $\hat{\mathbf{n}}(t)$ para el cual $|\alpha(t)\rangle$ resulta ser autoestado de $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}(t)$.

22 **Oscilaciones de neutrinos.** En este problema vamos a calcular la probabilidad de transición entre neutrinos de distinto sabor[2]. Por simplicidad, vamos a considerar solamente dos sabores de neutrinos, ν_e y ν_μ.

Los estados de masa $|\nu_1\rangle$ y $|\nu_2\rangle$ son los autoestados del hamiltoniano libre, esto es

$$H|\nu_i(\mathbf{p})\rangle = E_i(\mathbf{p})|\nu_i(\mathbf{p})\rangle\,, \qquad E_i(\mathbf{p})^2 = \mathbf{p}^2 + m_i^2$$

En las interacciones débiles, los neutrinos se producen siempre con un sabor definido (autoestados de sabor). Dichos autoestados de sabor $|\nu_e\rangle$ y $|\nu_\mu\rangle$ se pueden escribir en términos de los autoestados de masa

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \cos(\theta)|\nu_1(\mathbf{p})\rangle + \mathrm{sen}(\theta)|\nu_2(\mathbf{p})\rangle\,, & (1)\\ |\nu_\mu\rangle &= -\mathrm{sen}(\theta)|\nu_1(\mathbf{p})\rangle + \cos(\theta)|\nu_2(\mathbf{p})\rangle\,. & (2) \end{aligned}$$

(a) Considerando que la evolución temporal de los estados está dada por H, hallar la probabilidad de encontrar un neutrino muónico a tiempo $t > 0$ si a $t = 0$ se tenía un neutrino electrónico.

(b) Debido a que los neutrinos son partículas ultrarrelativistas, es posible aproximar $E_i(\mathbf{p}) - E_j(\mathbf{p}) \simeq \frac{1}{2}\frac{m_i^2 - m_j^2}{|\mathbf{p}|}$. Reescriba la probabilidad hallada en el inciso anterior en término de la "diferencia de masas" $\Delta m^2 \doteq m_2^2 - m_1^2$. Verificar que si la diferencia de masas es nula, entonces el fenómeno de oscilación de neutrinos no existe (la determinación experimental de estas oscilaciones permitió concluir que los neutrinos debían tener masa).

23 El espacio de estados de cierto sistema físico se puede describir con un espacio de Hilbert de dimensión 3, siendo $\{|u_1\rangle\,, |u_2\rangle\,, |u_3\rangle\}$ una base ortonormal. En dicha base el hamiltoniano H del sistema y dos observables A y B están dados por

$$H = \begin{pmatrix} \hbar\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\hbar\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\hbar\omega_0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}\,,$$

donde ω_0, a, y b son constantes positivas. A $t = 0$ el estado del sistema es $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$.

(a) A $t = 0$ se mide la energía del sistema. ¿Qué valores pueden encontrarse y con que probabilidad? Calcular $\langle H \rangle$ y $\langle \Delta H \rangle$ para el estado $|\psi(0)\rangle$.

(b) Si a $t = 0$ en lugar de medir H se mide A, ¿qué resultados pueden obtenerse y con qué probabilidad? ¿Cuál es el vector de estado inmediatamente después de la medición? Repetir el cálculo si en lugar de A se mide B.

[2]Los neutrinos son partículas pertenecientes a la familia de los *leptones*, con carga nula y se creían no masivos. Hoy se conocen tres familias distintas (sabores) de neutrinos: electrónicos, muónicos y tauónicos (ν_e, ν_μ y ν_τ). Los experimentos llevados a cabo actualmente con neutrinos de distinta naturaleza (solares, atmosféricos) presentan fuertes evidencias a favor de la existencia de oscilaciones de neutrinos, es decir, de transiciones entre neutrinos de distintos sabores causadas por la presencia de masas y *mezclas*. La existencia de estas oscilaciones implica que dado un neutrino de un determinado sabor, ν_α, que se produce en algún proceso de interacción débil, a una distancia suficientemente larga de la fuente de producción, la probabilidad de encontrar un neutrino de un sabor diferente, ν_β, es no nula.

(c) Si a $t = 0$ no se realiza medición alguna, hallar $|\psi(t)\rangle$. Repetir el cálculo si a $t = 0$ se midió: (i) H, (ii) A, o (iii) B. Discutir, en cada caso, qué resultados se obtendrían si se midiesen A, B o H al instante t.

24 Se tiene una molécula triatómica y con $|\psi_n\rangle$ ($n = 1, 2, 3$) se representa el estado normalizado de un electrón completamente localizado en el átomo n-ésimo. Si se desprecia la posibilidad de que un electrón salte de un átomo a otro, el hamiltoniano H_0 del sistema es tal que $|\psi_n\rangle$ es autovector de H_0 con el mismo autovalor E_0 para todo n. Para tener en cuentra la posibilidad de que un electrón salte de átomo se agrega a H_0 una interacción W definida por la siguiente acción

$$W|\psi_n\rangle = -a\left(|\psi_{n-1}\rangle + |\psi_{n+1}\rangle\right) \ ,$$

con $a > 0$ (usamos notación cíclica: $|\psi_{3+1}\rangle \equiv |\psi_1\rangle$ y $|\psi_{1-1}\rangle \equiv |\psi_3\rangle$).

(a) Hallar los autovalores de $H = H_0 + W$ y su degeneración. ¿Está el electrón localizado en un sólo átomo cuando se encuentra en el estado fundamental?

(b) Suponga que a $t = 0$ el electrón se encuentra localizado en el átomo 1. Hallar la probabilidad de encontrarlo localizado en el átomo 3 para cierto $t > 0$.

25 **Efecto Zeno-Cuántico (Paradoja de Turing)**
Una de las clásicas paradojas de Zeno (450 a.c.), llamada paradoja del arquero, plantea la situación de una flecha en movimiento que es observada en cada instante de tiempo. Si en cada instante la flecha se encuentra en una posición determinada, entonces no puede moverse en dicho instante. Si el tiempo está formado por instantes entonces la flecha nunca puede moverse. Esta idea es contraria a nuestra concepción de movimiento en mecánica clásica. Sin embargo, el siguiente ejercicio muestra que, en mecánica cuántica, la descripción de Zeno sobre el movimiento de la flecha tiene una gran dosis de verdad: *el estado de un sistema cuántico no puede evolucionar si estamos "mirando" al sistema continuamente.* [3]

(a) Considere un sistema cuántico que a tiempo $t = 0$ se encuentra en un autoestado $|\phi\rangle$ de autovalor λ de cierto observable O y evoluciona de acuerdo a un hamiltoniano H. Si a tiempo $t > 0$ se mide el observable O, muestre que la probabilidad de obtener autovalores distintos a λ es proporcional a t^2 para tiempos suficientemente chicos.

(b) Ahora medimos N veces O, a intervalos de tiempo equiespaciados $\Delta t = 1/N$ entre $t = 0$ y $t = 1s$. Muestre que en el límite en que se observa al sistema permanentemente, $N \to \infty$, la probabilidad de obtener cualquier estado ortogonal a $|\phi\rangle$ a $t = 1s$ tiende a cero.

26 **Picture de Heisenberg**
Los postulados que vimos hasta ahora los escribimos en el llamado *Picture de Schrödinger*, en el cual son los estados del sistema los que tienen una evolución dinámica. En el llamado *Picture de Heisenberg*, en cambio, son los observables los que evolucionan mientras que el estado del sistema está siempre fijo (ver Complemento $\mathrm{G_{III}}$ del libro de Cohen-Tannoudji).

(a) Probar que los valores de expectación de un operador no dependen de la representación.

(b) Mostrar que el operador hamiltoniano es igual en ambos pictures.

27 Demostrar que el valor de expectación de un observable $A(t)$ en el estado $|\psi(t)\rangle$ satisface

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [A, H]\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle \ .$$

[3] Este efecto ha sido comprobado experimentalmente - ver, por ejemplo: Leibfried, D.; Blatt, R.; Monroe, C.; Wineland, D. (2003). *"Quantum dynamics of single trapped ions"*. Reviews of Modern Physics. **75**: 281.

(a) Derivar el teorema de Ehrenfest a partir de este resultado.

(b) Utilizar esta fórmula para estudiar nuevamente la precesión del espín (ver ejercicio 4).

28 Sea $X(t)$ el operador coordenada para una partícula libre en una dimensión en el picture de Heisenberg. Calcular $[X(t), X(0)]$.

29 Considere una partícula en un potencial unidimensional $V(X) = -kX$ (por ejemplo, puede corresponder a un campo gravitatorio o a un campo eléctrico uniforme).

(a) Escriba el teorema de Ehrenfest para los valores medios de la posición X y el momento P de la partícula. Integre las ecuaciones y compare con el resultado clásico.

(b) Muestre que la dispersión $\langle(\Delta P)^2\rangle$ no varía en el tiempo.

(c) Escriba la ecuación de Schrödinger en la representación de momentos. Deduzca luego una relación entre $\partial_t|\psi(p,t)|^2$ y $\partial_p|\psi(p,t)|^2$. Integre la ecuación e interprete.

30 **Entrelazamiento.** Decimos que un estado $|\psi\rangle$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ está **entrelazado** si no existen $|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ y $|\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$ tales que $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$. Demostrar que el estado $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x\rangle_1 \otimes |y\rangle_2 + |y\rangle_1 \otimes |x\rangle_2\right)$ está entrelazado, donde los subíndices 1 y 2 se utilizan para diferenciar los estados de polarización de dos fotones en un cristal de cuarzo (ver ejercicio 18).

31 Para el sistema y estado del ejercicio anterior, calcular la probabilidad de encontrar el valor $-E_0$ al medir la energía del primer fotón (es decir, al medir el operador $H_1 \doteq H \otimes \mathbb{1}$, donde H es el hamiltoniano dado por el ejercicio 18).

32 **Teorema de no-clonado.** El teorema de no-clonado establece que no es posible crear una copia idéntica de un estado cuántico desconocido arbitrario. Este teorema se expresa diciendo que no existe un operador unitario U actuando sobre $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ tal que resulte

$$U\left(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle\right) = |\phi\rangle \otimes |\phi\rangle\,,$$

para todos los $|\phi\rangle$ y $|\psi\rangle$ en $\mathcal{H}$. Demostrar este teorema (ver por ejemplo Ballentine, p. 209).

33 **Simetrías.** Decimos que una transformación U es una simetría de un sistema si deja invariante el módulo del producto interno entre dos vectores cualesquiera y además deja invariante al Hamiltoniano del sistema H (es decir, cumple $UHU^{-1} = H$). Demostrar que:

(a) $e^{-ip\cdot d/\hbar}$, siendo d una constante real, es una simetría de la partícula libre unidimensional.

(b) $e^{-i\epsilon H/\hbar}$, siendo ϵ una constante real, es una simetría de cualquier sistema cuyo hamiltoniano H no dependa explícitamente del tiempo.

34 **Generador infinitesimal de una simetría continua.** Sea $U(s) = e^{isK}$, con K hermítico y s real, un operador que es simetría de cierto sistema físico de hamiltoniano H independiente del tiempo para todo s.

(a) Probar que $[H, K] = 0$. K se conoce como el generador infinitesimal de la simetría.

(b) Demostrar que el valor de expectación de K se conserva en el tiempo. Se dice que K es entonces una constante de movimiento.

(c) Probar que el momento lineal es la constante de movimiento asociada a la invariancia ante traslaciones arbitrarias.

35 **Simetrías y degeneración**
Sea G el generador infinitesimal de una simetría de cierto sistema con hamiltoniano H. Demostrar que si $|\psi\rangle$ es un autoestado de H con energía E, entonces $f(G)|\psi\rangle$ (siendo f una función analítica) también es autoestado de H y tiene la misma energía E [4].

36 **¿Verdadero o falso?**

(a) Sobre cierto sistema cuántico se realizan mediciones sucesivas (a intervalos de tiempo infinitesimalmente pequeños entre ellas) de ciertos observables A, B y C en el siguiente orden $\{A, B, A, C, C, A\}$ obteniéndose respectivamente los valores $\{a_1, b_1, a_2, c_1, c_1, a_2\}$. Entonces, si inmediatamente después de la última medición se mide A se obtendrá el valor a_2.

(b) No es posible encontrar un operador T cuyo conmutador con el hamiltoniano H de un sistema sea $[T, H] = i\hbar$ si H está acotado por debajo (aclaración: esto nos dice que el operador tiempo no existe en mecánica cuántica).

(c) Se tienen dos sistemas con hamiltonianos dados por $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ y $H' = \frac{(p+B)^2}{2m} + V(x)$. Si $\langle p\rangle$ es nulo en cada autoestado de H entonces también es nulo en cada autoestado de H'.

37 * **Lógica Cuántica** (fuera de programa, sólo por diversión!)
Este ejercicio muestra diferencias entre la mecánica cuántica y la clásica desde un punto de vista lógico. Una proposición A para un dado x puede tener valor "falso" o "verdadero" (0 o 1). La negación $-A$ es otra proposición que se cumple si no se cumple A y no se cumple si se cumple A. La proposición compuesta $A \wedge B$ se cumple si y sólo si se cumplen A y B. La proposición $A \vee B$, que se cumple si y sólo si se cumple A o se cumple B (o ambos) puede definirse a partir de las proposiciones anteriores utilizando la ley de De Morgan

$$A \vee B \doteq -(-A \wedge -B)\,.$$

Verifique que esta ley tiene sentido y que en la lógica usual se cumple la ley distributiva (lógica Booleana)

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)\,.$$

En mecánica cuántica, las proposiciones V corresponden naturalmente a subespacios del espacio de Hilbert. Un vector $|\psi\rangle$ satisface la proposición V si $|\psi\rangle \in V$ y no la satisface si $|\psi\rangle \perp V$, es decir, si $|\psi\rangle$ pertenece a la proposición opuesta $-V$ (que en el caso cuántico debe entenderse como el subespacio ortogonal $-V \equiv V^\perp$. En forma equivalente, las proposiciones se pueden asimilar a los proyectores ortogonales sobre estos subespacios, que tienen autovalor 1 o 0 para $|\psi\rangle \in V$ o $|\psi\rangle \in -V$, respectivamente. $V \wedge W$ es naturalmente el subespacio intersección $V \cap W$.

(a) Utilizando la ley de Morgan para definir $V \vee W$ (proposición "V o W") mostrar que $V \vee W$ es el espacio $V \oplus W$.

(b) Verificar que la lógica cuántica no es distributiva.

[4] Como en general será $f(G)|\psi\rangle \neq |\psi\rangle$, la existencia de simetrías suele generar un aumento en la degeneración de los niveles de energía.