Nature isn't classical, dammit, and if you want to make a simulation of nature, you'd better make it quantum mechanical (...)

R. Feynman.

Los ejercicios de esta guía se centran en estudiar uno de los sistemas cuánticos más sencillos y que más aplicaciones tiene: el oscilador armónico cuántico.

---

38 Resolución algebraica del oscilador armónico unidimensional.

(a) Suponer que se tiene un operador N con autovalores n y un operador a tales que $[N, a] = -ca$ con $c \in \mathbb{C}$. Llamamos $|n\rangle$ al autoestado de N con autovalor n (suponemos que no hay degeneración).

I- Mostrar entonces que $a|n\rangle$ es autoestado de N con autovalor $n - c$

II- Si N es hermítico, mostrar que $a^\dagger|n\rangle$ es autoestado de N con autovalor $n + c$, con n y c reales. Notar que si c es positivo entonces a baja los autovalores y se lo llama *operador de bajada o aniquilación* mientras que $a^\dagger$ los sube y se lo llama *operador de subida o creación*.

(b) Considere un oscilador armónico en una dimensión, y las siguientes definiciones

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right), \quad a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,,$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right), \quad a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,,$$

donde $\{|n\rangle\}_{n\in\mathbb{Z}}$ son autoestados de $N := a^\dagger a$ con autovalor n.

I- Calcular el conmutador $[a, a^\dagger]$ y comprobar que se verifiquen las relaciones de conmutación del inciso (a) con $c = 1$.

II- Muestre que los autovalores de N son enteros no negativos, asumiendo que existe el estado $|0\rangle$. Por lo tanto $n \in \mathbb{N}$.

III- Mostrar que $H = \hbar\omega(N + 1/2)$, con lo que los autestados de N coinciden con los de H.

IV- Evalúe $\langle m|x|n\rangle$, $\langle m|p|n\rangle$, $\langle m|\{x,p\}|n\rangle$, $\langle m|x^2|n\rangle$ y $\langle m|p^2|n\rangle$.

V- Compruebe que se cumple el teorema del virial para los valores de expectación de la energía cinética y potencial tomados con respecto a un autoestado de la energía.

39 Existencia del estado fundamental. Resuelva la ecuación diferencial $a\,|0\rangle = 0$ en representación de coordenadas para obtener el estado fundamental. Obtener luego el primer estado excitado del oscilador armónico unidimensional a partir de la relación $a^\dagger\,|0\rangle = |1\rangle$.

40 Incerteza para estados del oscilador cuántico. Utilizando los resultados del ejercicio anterior, muestre que los autoestados del oscilador armónico unidimensional satisfacen la siguiente relación,

$$\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta p)^2 \right\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \hbar^2\,.$$

¿Qué ocurre para $n = 0$? ¿Qué condición impone esto sobre la función de onda del estado fundamental?

41 **Propagador del oscilador armónico cuántico.** El propagador es una cantidad relevante que estudiaremos con más detalle al estudiar la formulación de la mecánica cuántica en términos de integrales de camino. Considere la cuantización canónica de un oscilador armónico unidimensional X de frecuencia ω (y masa $m = 1$ por simplicidad).

(a) Calcule la función de dos variables $\langle 0| \hat{X}(t_1)\hat{X}(t_2) |0\rangle$ siendo $\hat{X}$ el operador posición en la representación de Heisenberg, t_1 y t_2 dos instantes arbitrarios y $|0\rangle$ el estado de vacío.

(b) Muestre que la función $i \langle 0| T(\hat{X}(t_1)\hat{X}(t_2)) |0\rangle$ (donde $T(...)$ significa que los operadores dentro del paréntesis deben estar ordenados temporalmente) es una función de Green del operador diferencial $\partial_t^2 + \omega^2$.

42 **Estados coherentes.** Se definen los estados coherentes de un oscilador armónico en una dimensión como los autoestados del operador de aniquilación a,

$$a |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle \,,$$

donde λ es en general un número complejo (note que a es no hermitíco).

(a) Demuestre que $|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2} e^{\lambda a^\dagger} |0\rangle$ es un estado coherente normalizado.

(b) Demuestre que los estados coherentes verifican la relación de mínima incerteza.

(c) Pruebe que un estado coherente se puede obtener también mediante la aplicación del operador de traslación al estado fundamental.

(d) Calcule $\langle H\rangle$, $\langle P\rangle$ y $\langle X\rangle$ en un estado coherente y muestre que satisfacen la misma relación que las variables clásicas $E = p^2/2m + m\omega^2 x^2/2$ para $E \gg \hbar\omega$. ¿Qué condicion impone ésto para los valores de λ?

(e) Halle la evolución temporal de $|\lambda\rangle$ desarrollándolo en la base $\{|n\rangle\}$ de autoestados de H. Muestre que el estado continúa siendo autoestado del operador a, pero que el autovalor α varía en el tiempo. Dibuje en el plano complejo la evolución de α y muestre como varían $\langle H\rangle$ y $\langle P\rangle$ en el tiempo.

(f) Calcular el producto interno entre dos estados coherentes. ¿Son ortogonales?

43 **Oscilador armónico forzado.**
Considere un oscilador armónico cargado (carga $q > 0$) moviéndose unidimensionalmente en presencia de un campo eléctrico constante y uniforme, de modo que el hamiltoniano es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 + qEx.$$

Escribir la función de onda del estado fundamental y hallar el espectro de energía del sistema. Ayuda: Notar que, clásicamente, el efecto del campo eléctrico consiste en desplazar la posición de equilibrio del oscilador.

44 **Oscilador armónico tridimensional isotrópico.**
Cuantizar el oscilador armónico tridimensional isotrópico, cuyo hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \mathbf{r}^2 \,,$$

donde $\mathbf{r} = (x, y, z)$ y $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$.

(a) Hallar los niveles de energía y la degeneración de cada uno de ellos. Dar una base de los subespacios asociados a los primeros dos niveles de energía degenerados.

(b) Mostrar que los operadores $L_z \doteq xp_y - yp_x$ y $\mathbf{L}^2 \doteq \mathbf{L}\cdot\mathbf{L}$ conmutan con H.

(c) Dar dos CCOC.

45 **Electrón en un campo magnético. Niveles de Landau.** El Hamiltoniano de un electrón en presencia de un campo magnético externo estático con potencial vector $\mathbf{A}(x,y,z)$ está dado por

$$H = \frac{1}{2m}\left[\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(x,y,z)\right]^2.$$

Definimos los operadores Π_i, $i = x, y, z$ como

$$\Pi_i = p_i - \frac{eA_i}{c}.$$

(a) Escriba el Hamiltoniano en función de los operadores Π_i.

(b) Calcule $[x_i, \Pi_j]$ (donde x_i, $i = 1, 2, 3$ son los operadores de posición x, y, z). ¿Qué relaciones de conmutación se obtienen? Interprete.

(c) Calcule $[\Pi_i, \Pi_j]$. Interprete.

Considere el caso en que el campo magnético es uniforme en la dirección $\hat{e}_z$, es decir $\mathbf{B} = B\hat{e}_z$. En tal caso, en un gauge apropiado se puede tomar como potencial vector $\mathbf{A}(x,y,z) = A_x(x,y)\hat{e}_x + A_y(x,y)\hat{e}_y$, con $A_x = -By/2$, $A_y = Bx/2$. En este gauge tenemos que $\Pi_z = p_z$.

(d) Muestre que entonces $[p_z, H] = 0$. ¿Qué consecuencias tiene esto? ¿Cuáles son los autovalores del operador p_z?

(e) ¿Cuánto vale el conmutador $[\Pi_x, \Pi_y]$ en este caso? Muestre que redefiniendo los operadores Π_x y Π_y multiplicándolos por una constante apropiada, se obtiene la relación de conmutación canónica.

(f) Concluya entonces que los autovalores del Hamiltoniano del electrón en el campo magnético uniforme son

$$E_{kn} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{|eB|\hbar}{mc}\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

donde $n \in \mathbb{N}_0$ y $k \in \mathbb{R}$. Interprete.

46 **¿Verdadero o falso?**

(a) Se tiene una partícula de masa m sometida al potencial del oscilador armónico unidimensional con frecuencia de oscilación ω. A tiempo $t = 0$, el sistema se encuentra en un estado para el cual una medición de la energía puede resultar solamente en los valores $\hbar\omega/2$ y $3\hbar\omega/2$ con la misma probabilidad, y en el que el valor medio del momento es igual a $(m\omega\hbar/2)^{1/2}$. Esta información determina completamente el estado del sistema a $t = 0$.

(b) En la representación de Heisenberg, el operador de número del oscilador armónico unidimensional es independiente del tiempo.

(c) Se tiene un oscilador armónico isotrópico de frecuencia ω en d dimensiones. Entonces, el nivel asociado a la energía $\hbar\omega\left(N + \frac{d}{2}\right)$ (siendo N un entero no negativo) tiene degeneración $\frac{(N+d-1)!}{N!\,(d-1)!}$.