> Due to the lucidity and apparently incontestable character of the argument, the paper of Einstein, Podolsky and Rosen created a stir among physicists and has played a large role in general philosophical discussion. Certainly, the issue is of a very subtle character and suited to emphasize how far, in quantum theory, we are beyond the reach of pictorial visualization.
>
> *N. Bohr.*

El entrelazamiento es una característica fundamental de las teorías cuánticas. En esta práctica estudiaremos el entrelazamiento en forma cualitativa y cuantitativa, introduciendo además algunas ideas y cantidades centrales de la teoría de la información cuántica.

$\boxed{72}$ **Máquinas imposibles.**

Considere la siguiente jerarquía de máquinas imposibles (las tres primeras sí son posibles en el mundo clásico!):

- Teleportador sin entrelazamiento: Es una máquina que permite enviar un estado cuántico del laboratorio A al B a través de una señnal clásica (un teléfono).
- Copiador cuántico universal: Es una máquina capaz de obtener dos copias idénticas de un estado cuántico arbitrario.
- Medidor simultáneo: Es una máquina que dado un estado cuántico de entrada permite como salida obtener valores simultáneos de dos observables arbitrarios.
- Teléfono de Bell: Este aparato permite a A, realizando una medición, enviar información a B. (Por lo tanto, si A y B están suficientemente separados, permite transmitir información a velocidad superlumínica).

(a) Argumentar que con un teleportador sin entrelazamiento se puede construir un copiador cuántico, y con éste se puede construir un medidor simultáneo.

(b) Utilizando un estado entrelazado, vimos que sí es posible teleportar un estado cuántico. Pensar por qué motivo esto no entra en conflicto con el hecho de que no existen copiadores cuánticos universales.

Referencia: "Quantum Information Theory: an Invitation", R. F. Werner, arXiv:quant-ph/0101061

$\boxed{73}$ **Estados puros.**

Demostrar que una matriz densidad ρ representa un estado puro si y sólo si $\mathrm{tr}(\rho^2) = 1$.

$\boxed{74}$ Para un haz de partículas de espín $1/2$ se conocen los valores de expectación de S_i, siendo $\langle S_i \rangle = P_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Escriba la matriz densidad correspondiente.

$\boxed{75}$ Construir la matriz densidad que representa una mezcla estadística de los autoestados de espín en z de un muón en la proporción:

(a) $75\,\%$ $|+\rangle$ y $25\,\%$ $|-\rangle$.

(b) $50\,\%$ $|\psi_1\rangle \equiv \sqrt{\frac{3}{4}}|+\rangle + \sqrt{\frac{1}{4}}|-\rangle$ y $50\,\%$ $|\psi_2\rangle \equiv \sqrt{\frac{3}{4}}|+\rangle - \sqrt{\frac{1}{4}}|-\rangle$.

Verificar que ambas matrices densidad son equivalentes. Esto nos dice que por más que conozcamos el estado (en este caso, la matriz densidad) no podemos determinar cómo dicho estado fue creado.

76 Hallar la evolución temporal de una partícula de espín 1/2, que a $t = 0$ se encuentra en un estado arbitrario $\rho = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r})$ ($|\mathbf{r}| \leq 1$), en presencia de un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\hat{e}_z$ (recordar que $H = -\gamma \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$).

77 Sea $\rho_{AB} = |\psi_{AB}\rangle \langle\psi_{AB}|$. Verificar que $\rho_A = \mathrm{tr}_B \rho_{AB}$ es tal que

$$\langle\psi| A \otimes I |\psi\rangle = \mathrm{tr}(\rho_A A) \,.$$

Es decir, la matriz densidad reducida a un subsistema reproduce los valores de expectación de observables que actúan (no trivialmente) sólo sobre dicho subsistema.

78 Para un sistema de dos electrones:

(a) Escriba la matriz densidad del estado singlete.

(b) Hallar la matriz densidad reducida a cada uno de los electrones. Interpretar.

(c) ¿Cómo es la matriz densidad reducida si el estado del sistema es una mezcla con igual probabilidad de los tres estados del triplete?

79 **Estados maximalmente entrelazados.**
Se dice que un estado puro $|\psi_{AB}\rangle$ está *maximalmente entrelazado* entre los subsistemas A y B si la matriz densidad reducida a uno de los subsistemas es maximalmente mixta (proporcional a la identidad). Considerar el estado $|\psi_{AB}\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle$ y obtener las condiciones que deben cumplir a, b, c y d para que el estado esté maximalmente entrelazado. En particular, mostrar que los *estados o pares de Bell*: $|\Phi^{\pm}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$ y $|\Psi^{\pm}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$ cumplen las condiciones anteriores y por lo tanto están maximalmente entrelazados.

80 Calcular la entropía de von Neumann de un estado arbitrario de qubit, $\rho = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r})$ en función del vector $\mathbf{r}$. Mostrar que el resultado sólo depende de $r = |\mathbf{r}|$ y graficarlo como función de r. ¿Cómo se visualizan los estados puros y los impuros en la *bola de Bloch*? ¿Es el resultado consistente con la propiedad de concavidad de la entropía?

81 Calcular la entropía de entrelazamiento entre los qubits A y B para el estado $|\psi_{AB}\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle$, con $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$.

82 * **Catalizador del entrelazamiento.**
Probar que el estado $|\psi_{AB}\rangle = \sqrt{0{,}4}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}4}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|22\rangle + \sqrt{0{,}1}\,|33\rangle$ (describe el estado de un par de subsistemas de cuatro niveles) no se puede convertir en $|\phi_{AB}\rangle = \sqrt{0{,}5}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|11\rangle + \sqrt{0{,}25}\,|22\rangle$ mediante LOCC. Mostrar que, sin embargo, sí es posible convertir $|\psi_{AB}\rangle \otimes |c\rangle$ en $|\phi_{AB}\rangle \otimes |c\rangle$ mediante LOCC, siendo $|c\rangle = \sqrt{0{,}6}\,|00\rangle + \sqrt{0{,}4}\,|11\rangle$. El estado $|c\rangle$ que posibilita este proceso se conoce como *catalizador*.

Este ejercicio es opcional. Si les interesa hacerlo, pueden ver el Teorema 12.15, p. 576 del libro "Quantum computation and quantum information" de Nielsen y Chuang.

83 * **Cálculo numérico de la entropía de una matriz densidad aleatoria**
En este ejercicio y el siguiente, les proponemos hacer algunos cálculos numéricos de entropías. En los enunciados se hará referencia al lenguaje Mathematica, pero pueden utilizar otro programa adaptando las funciones/comandos.

Imaginemos que queremos calcular numéricamente la entropía de matrices densidad aleatorias (esto será relevante para el próximo ejercicio). Para ello:

(a) Comenzar generando una matriz X con coeficientes complejos aleatorios, de tamaño dimPhys $\times$ dimAux.

(b) Con la matriz X es posible armar una matriz densidad aleatoria ρ calculando

$$\rho = \frac{X^\dagger X}{\mathrm{tr}(X^\dagger X)} .$$

Revisar que efectivamente ρ parece una matriz densidad razonable.

(c) Calcular la entropía de ρ hallando sus autovalores λ_i usando que $S(\rho) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i$.

84 * **Subaditividad fuerte de la entropía: prueba numérica**

En este ejercicio, les proponemos verificar numéricamente la validez de la propiedad de subaditividad fuerte de la entropía: $S_C + S_{ABC} \leq S_{AB} + S_{BC}$. Retomando desde el ejercicio anterior, les proponemos:

(a) Tomar dimPhys como el producto de dimA, dimB y dimC. Empezar tomando valores pequeños de estas dimensiones y una vez que estén seguros de que todo funciona bien los pueden ir aumentando.

(b) Definir un vector $e_i^{(\mathrm{dim})} \equiv e\,[i\_, \mathrm{dim}\_]$ de dimensión dim igual a uno para la entrada i y cero para todas las otras.

(c) Definir $\mathbb{I}^{(\mathrm{dim})} \equiv \mathrm{id}[\mathrm{dim}\_]$ una matriz densidad de dimensión dim.

(d) Con todo esto, la matriz densidad reducida $\rho_{AC} = \mathrm{tr}_B \rho_{ABC}$ se calcula como

$$\rho_{AC} = \sum_{b=1}^{\mathrm{dimB}} \left[\mathbb{I}^{(\mathrm{dimA})} \otimes e_b^{(\mathrm{dimB})} \otimes \mathbb{I}^{(\mathrm{dimC})}\right]^T \rho_{ABC} \left[\mathbb{I}^{(\mathrm{dimA})} \otimes e_b^{(\mathrm{dimB})} \otimes \mathbb{I}^{(\mathrm{dimC})}\right] ,$$

donde en Mathematica el producto tensorial se implementa con el comando KroneckerProduct. Revisen que esta expresión les parezca correcta y encuentren la análoga para calcular ρ_{BC} y ρ_C.

(e) Una vez que tengan ρ_{ABC}, ρ_{AC}, ρ_{BC} y ρ_C, calcular

$$S_{AC} + S_{BC} - S_C - S_{ABC}$$

para un número grande de matrices densidad hasta convencerse de que es siempre positivo, como se deduce de la subaditividad fuerte de la entropía.

85 **Desigualdad de Tsirelson.**

Para $Q = \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, $R = \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, $S = \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, $T = \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, siendo $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$ y $\mathbf{t}$ versores reales en tres dimensiones, mostrar que vale

$$(Q \otimes S + R \otimes S + R \otimes T - Q \otimes T)^2 = 4I + [Q, R] \otimes [S, T] .$$

Usar este resultado para probar la desigualdad de Tsirelson,

$$\langle Q \otimes S + R \otimes S + R \otimes T - Q \otimes T \rangle \leq 2\sqrt{2} .$$

86 **¿Verdadero o falso?**

(a) El entrelazamiento (bipartito) depende sólo del estado y no de la partición del espacio de Hilbert.

(b) Para un sistema de dos electrones en el estado de singlete, los observables $A_1 = \sigma_z \otimes I$, $A_2 = \sigma_x \otimes I$, $B_1 = I \otimes \frac{-\sigma_x - \sigma_z}{\sqrt{2}}$ y $B_2 = I \otimes \frac{-\sigma_x + \sigma_z}{\sqrt{2}}$, saturan la desigualdad CHSH.

(c) Las desigualdades de Bell pueden violarse para estados no entrelazados.