Problema VII

P7 Un haz de átomos de spin ½ es sometido a una serie de mediciones del tipo Stern–Gerlach en la siguiente manera:

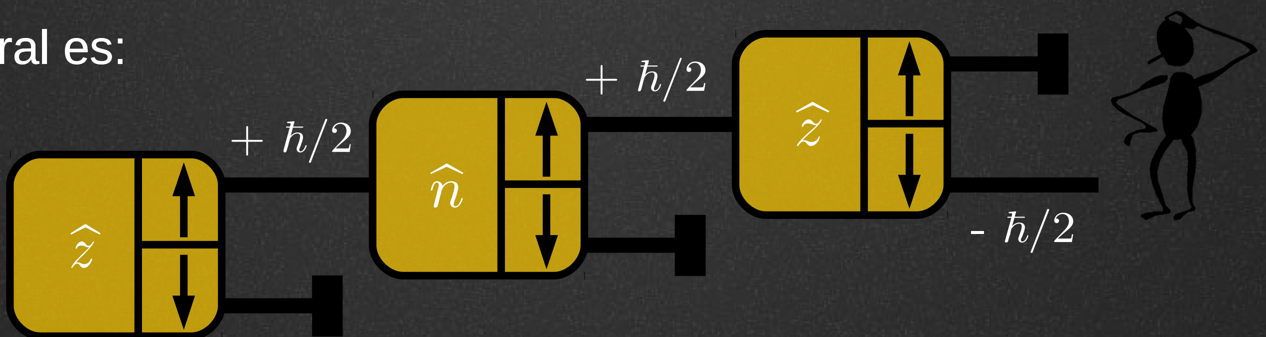
(a) La primera medición acepta átomos con $s_z = \hbar/2$ y rechaza átomos con $s_z = -\hbar/2$.

(b) La segunda medición acepta átomos con $s_n = \hbar/2$ y rechaza con $s_n = -\hbar/2$, donde s_n es el autovalor del operador $\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$ con $\hat{\boldsymbol{n}}$ en el plano xz y formando un ángulo β con el eje z.

(c) Una tercera medición acepta $s_z = -\hbar/2$ y rechaza $s_z = \hbar/2$.

¿Cuál es la intensidad del haz final $s_z = -\hbar/2$ si el haz $s_z = \hbar/2$ que pasa la primer medición esta normalizado a uno? ¿Cómo se debe orientar el segundo aparato de medición para maximizar la intensidad del haz final $s_z = -\hbar/2$?

El setup general es:



en donde $\widehat{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$

$$\Longrightarrow\ \widehat{n} = (\sin\beta, 0, \cos\beta)$$

Problema VII

Si el **primer** SG solo deja pasar átomos con +ħ/2 en +z, ¿qué estado sale de ese SG?

$$|\psi_{inicial}\rangle \implies |\psi_1\rangle = |+,\hat{z}\rangle$$

(con probabilidad 1)

Si entro al **segundo** SG con $|\psi_1\rangle=|+,\hat{z}\rangle$, ¿cuál es la probabilidad de medir +ħ/2 si mido en la dirección n?

Aplico Born!

Recordemos a Born:

- Los posibles resultados al medir el obsevable representado por el operador Â son los autovalores a_i de dicho operador Â
- Regla de Born: $\mathrm{P}(\mathrm{a}_i|\psi) = |\langle\psi|\, a_i\rangle|^2$

El autoestado asociado a +ħ/2 en la dirección n es (**recordar problema 3**):

$$|+,\hat{n}\rangle = \cos(\theta/2)\,|+,\hat{z}\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)\,|-,\hat{z}\rangle$$

(combinación lineal de autoestados de $\hat{s}_z$ con autovalores +ħ/2 y -ħ/2)

Problema VII

Aplico Born para calcular la probabilidad de medir +ħ/2 si mido en la dirección n con el **segundo** SG:

$$P(+\hbar/2|\psi_1) = |\langle\psi_1|+,\hat{n}\rangle|^2 = \left|\langle+,\hat{z}|\left(\cos(\beta/2)|+,\hat{z}\rangle + \sin(\beta/2)|-,\hat{z}\rangle\right)\right|^2$$

$$= [...] = \cos(\beta/2)^2$$

¿Qué estado sale de ese **segundo** SG?

$$|\psi_1\rangle \implies |\psi_2\rangle = \cos(\beta/2)|+,\hat{z}\rangle + \sin(\beta/2)|-,\hat{z}\rangle$$

Ahora entro al **tercer** SG con $|\psi_2>$, ¿cuál es la probabilidad de medir -ħ/2 si mido en la dirección ẑ? ⇒ Aplico Born!

$$P(-\hbar/2|\psi_2) = |\langle\psi_2|-,\hat{z}\rangle|^2 = \left|\left(\cos(\beta/2)\langle+,\hat{z}| + \sin(\beta/2)\langle-,\hat{z}|\right)|-,\hat{z}\rangle\right|^2$$

$$= [...] = \sin(\beta/2)^2$$

¿Cuál es la probabilidad total de todo el proceso? ¿Para qué β es máxima?

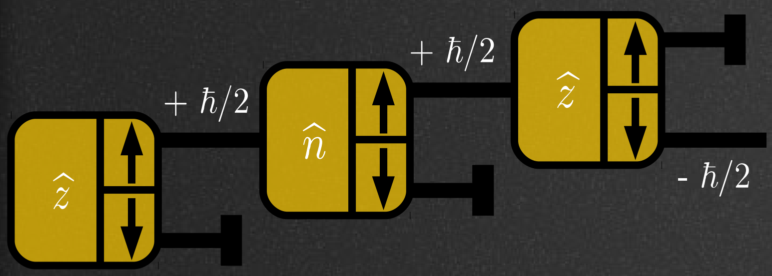
$$\mathrm{P}_{total} = P(s_n = +\hbar/2|\psi_1)P(s_z = -\hbar/2|\psi_2) = \cos(\beta/2)^2\sin(\beta/2)^2$$

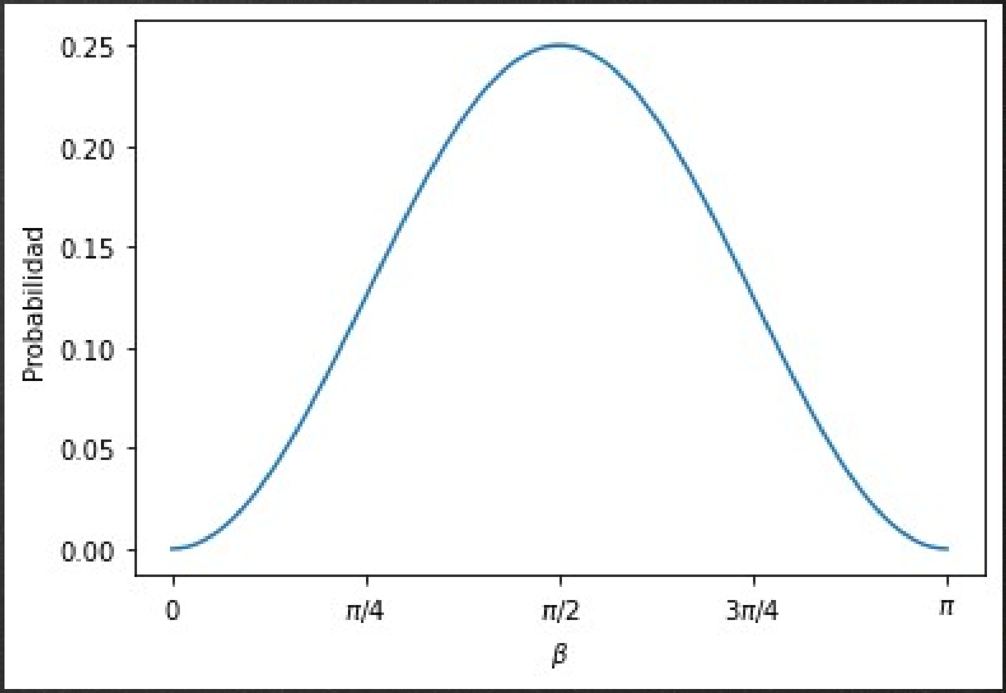
Problema VII

¿Cuál es la probabilidad total de todo el proceso? ¿Para qué β es máxima?

$$\mathrm{P}_{total} = P(s_n = +\hbar/2|\psi_1)P(s_z = -\hbar/2|\psi_2) = \cos(\beta/2)^2 \sin(\beta/2)^2$$

→ se maximiza en β=π/2
→ P_{max}=1/4





en donde

$$\hat{n} = (\sin\beta, 0, \cos\beta)$$

¿Que significado físico tiene cada β?