Ejercicios Guía 1

Federico Bai

1/4/2021

1 Esfera de Bloch

El vector con norma 1 mas general posible de un espacio vectorial complejo de dimensión 2 es:

$$|\psi_1\rangle = c_1 e^{i\varphi_1}|0\rangle + c_2 e^{i\varphi_2}|1\rangle$$

con $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ una base ortonormal y vale que $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$

1.1 Inciso a)

Veamos que

$$|\psi_2\rangle = \cos(\frac{\theta}{2})|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\frac{\theta}{2})|1\rangle$$

satisface $\langle\psi_2|\psi_2\rangle = 1$ y que, a menos de una fase global, ψ_1 puede escribirse como ψ_2. Realizando el producto:

$$\langle\psi_2|\psi_2\rangle = |\cos(\frac{\theta}{2})|^2 + |e^{i\phi}\sin(\frac{\theta}{2})|^2 = 1$$

con lo cual vemos que satisface la primera condición. Como lo observable de un estado depende de las amplitudes y de las fases relativas entre las componentes del vector, multiplicar por una fase global no modifica la descripción del estado. Por lo tanto se puede multiplicar $|\psi_1\rangle$ por $e^{-i\varphi_1}$ y definiendo $\phi \equiv \varphi_2 - \varphi_1$ se observa que, a menos de una fase global, $|\psi_1\rangle$ puede escribirse como $|\psi_2\rangle$.

1.2 Inciso b)

Los puntos sobre una esfera de radio 1 deben cumplir:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{1.1}$$

Veamos que $(\sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta))$ cumple con (1.1). Reemplazando se obtiene:

$$\sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

por lo tanto, los puntos sobre una esfera se pueden parametrizar de esa manera. Ahora veamos un vector de norma 1 en un espacio vectorial complejo de dimension 2 dado por:

$$|\psi\rangle = \cos\theta|0\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|1\rangle \tag{1.2}$$

si utilizamos coordenadas esféricas, se puede escribir como:

$$|\psi\rangle = z|0\rangle + (x+iy)|1\rangle$$

Por la condición de norma 1, es evidente que las componentes x,y,z satisfacen (1.1), lo cual implica que hay una relación 1 a 1 entre los puntos de una esfera de radio 1 y los vectores de dimensión 2 complejos (a menos de una fase global).

1.3 Inciso c)

Aplico la transformación $\theta \longrightarrow \pi - \theta$, $\phi \longrightarrow \phi + \pi$, al vector $|\psi_2\rangle$ del inciso a) y defino a este nuevo vector como:

$$\begin{aligned}|\psi'\rangle &= \cos(\frac{\pi-\theta}{2})|0\rangle + e^{i(\phi+\pi)}\sin(\frac{\pi-\theta}{2})|1\rangle \\ &= \sin(\frac{\theta}{2})|0\rangle - e^{i\phi}\cos(\frac{\theta}{2})|1\rangle\end{aligned}$$

Si realizamos el producto escalar se ve que $\langle\psi_2|\psi'\rangle = 0$, por lo tanto, $|\psi'\rangle$ es un estado ortonormal a $|\psi_2\rangle$. Es inmediato viendo la transformación que los puntos que forman estados ortogonales son puntos opuestos de la esfera de Bloch
Si aplicamos esta transformación a (1.2) vemos que:

$$\begin{aligned}|\psi''\rangle &= \cos(\pi-\theta)|0\rangle + e^{i(\phi+\pi)}\sin(\pi-\theta)|1\rangle \\ &= -\cos(\theta)|0\rangle - e^{i\phi}\sin(\theta)|1\rangle \\ &= -|\psi\rangle\end{aligned}$$

Recordemos que el sentido físico (lo observable) de un estado esta relacionado con la norma al cuadrado, la cual depende de sus amplitudes y de la fase relativa entre las componentes del vector (por ejemplo, al calcular probabilidades mediante Born), por lo tanto, multiplicar $|\psi\rangle$ por una fase global (por ejemplo -1) no cambia la descripción del estado. Entonces, vemos que (1.2), en realidad, repite estados sobre la esfera. Para evitar esto, se modifica a (1.2) por $|\psi_2\rangle$.

1.4 Inciso d)

Recordemos que:

$$|+;\hat{z}\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad |-;\hat{z}\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

tomo como base la base ortonormal $\{|+;\hat{z}\rangle;|-;\hat{z}\rangle\}$.
Del inciso a) sabemos que un estado puede definirse como $|\psi_2\rangle$, y del punto 3) de la guia 1 sabemos que, dado un versor $\hat{n}$ parametrizado esfericamente, los autoestados del operador $\hat{n}\vec{\sigma}$ estan dados por:

$$|+;\hat{n}\rangle = \begin{pmatrix}\cos(\frac{\theta}{2})\\ \sin(\frac{\theta}{2})e^{i\phi}\end{pmatrix} \qquad |-;\hat{n}\rangle = \begin{pmatrix}\sin(\frac{\theta}{2})\\ -\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\phi}\end{pmatrix} \tag{1.3}$$

de (1.3) se puede deducir:

$$\begin{aligned}&|+;\hat{z}\rangle \Longrightarrow \theta = 0 && |-;\hat{z}\rangle \Longrightarrow \theta = \pi \\ &|+;\hat{x}\rangle \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2},\ \phi = 0 && |-;\hat{x}\rangle \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2},\ \phi = \pi \\ &|+;\hat{y}\rangle \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2},\ \phi = \frac{\pi}{2} && |-;\hat{y}\rangle \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2},\ \phi = \frac{3}{2}\pi\end{aligned}$$

Por lo tanto, los autoestados de spin en las direcciones $\hat{z}, \hat{x}, \hat{y}$ corresponden a los puntos sobre la esfera de Bloch en sus respectivos ejes. De igual manera sucede con los autoestados de spin en una dirección $\hat{n}$, estos autoestados están representados en la esfera de Bloch mediante puntos (en la superficie de la esfera) en la dirección $\hat{n}$

1.5 Inciso e)

En la polarización de fotones podemos definir un vector $|\psi\rangle$ tal que:

$$|\psi\rangle = \cos(\theta)|x\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta)|y\rangle$$

En este caso se define $|x\rangle \equiv |H\rangle$ y $|y\rangle \equiv |V\rangle$.
Recordemos que, en el caso de polarización circular se definen:

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|x\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|y\rangle \qquad |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|x\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|y\rangle$$

y, en el caso de que $\theta = \frac{\pi}{4}$:

$$|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + |y\rangle) \qquad |A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - |y\rangle)$$

Observemos entonces:

$$\begin{aligned} &|\psi\rangle = |H\rangle \implies \theta = 0 && |\psi\rangle = |V\rangle \implies \theta = \frac{\pi}{2},\ \phi = 0 \\ &|\psi\rangle = |D\rangle \implies \theta = \frac{\pi}{4},\ \phi = 0 && |\psi\rangle = |A\rangle \implies \theta = \frac{\pi}{4},\ \phi = \pi \\ &|\psi\rangle = |R\rangle \implies \theta = \frac{\pi}{4},\ \phi = \frac{\pi}{2} && |\psi\rangle = |L\rangle \implies \theta = \frac{\pi}{4},\ \phi = \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

Para que la polarización sea lineal, la diferencia de fases entre las componentes de $|\psi\rangle$ debe ser $= 0, \pi$, por lo tanto $\phi = 0, \pi$ (circunferencia en el plano xz en la esfera de Bloch)(Ver Figura 1)

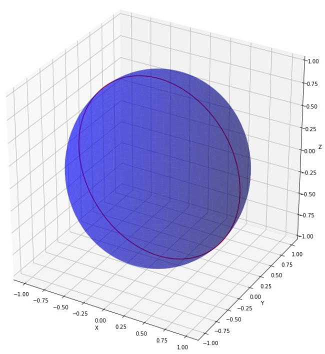

Figure 1: *Estados con polarización lineal (curva roja) representados en la esfera de Bloch*

2 Problema 11 Guía 1

El estado mas general de un fotón puedo escribirlo como:

$$|\psi\rangle = \cos(\theta)|x\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta)|y\rangle$$

2.1 Inciso a)

El primer dato es que la polarización es lineal, por lo tanto, $\phi = 0, \pi$, el segundo dato es que $|\langle y|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{5}$, entonces:

$$\sin^2(\theta) = \frac{1}{5} \tag{2.1}$$

lo cual impone una condición sobre θ, es decir:

$$\theta = \arcsin(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}) = \pm\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})$$

Entonces, vemos que esto no determina unívocamente el estado de polarización ya que con estas condiciones hay 2 valores posibles para θ y 2 valores posibles para ϕ. Si reemplazamos esto en $|\psi\rangle$ nos queda:

$$|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}|x\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{5}}|y\rangle$$

en donde se utilizó la identidad $\cos(\pm\arcsin(\theta)) = \sqrt{1-\theta^2}$ y en donde la elección de signo queda determinada en base a la elección de θ y ϕ.

2.2 Inciso b)

Para calcular probabilidades utilizamos la regla de Born para el calculo de probabilidades. En primer lugar realizamos:

$$\langle\psi|y\rangle = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Longrightarrow \quad P_1 \equiv |\langle\psi|y\rangle|^2 = \frac{1}{5}$$

con P_1 la probabilidad de que el estado de polarización sea $|y\rangle$ luego de atravesar el polarizador.

Luego:

$$\langle y|R\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad P_2 \equiv |\langle y|R\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

con P_2 la probabilidad de que el estado de polarización sea $|R\rangle$ luego de atravesar el polarizador.

Finalmente:

$$\langle R|y'\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{\pi}{6}) - \frac{i}{\sqrt{2}}\cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad P_3 \equiv |\langle R|y'\rangle|^2 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

con P_3 la probabilidad de que el estado de polarización sea $|y'\rangle$ después de atravesar el polarizador.

Por ultimo, la probabilidad de transmisión estará dada por el producto de las probabilidades anteriores:

$$P_{Total1} = P_1.P_2.P_3 \quad \Longrightarrow \quad P_{Total1} = \frac{1}{20}$$

Observemos que la probabilidad de transmisión no depende de cual de los estados del inciso a) es el correcto, puesto que la elección de θ o de ϕ no influye, en este caso, al calcular P_1, ya que al elevar al cuadrado todo queda positivo.

2.3 Inciso c)

Procediendo de igual manera que en el inciso b):

$$\langle \psi | y' \rangle = -\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{-2 \pm \sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$$

$$\Longrightarrow \quad P_4 \equiv |\langle \psi | y' \rangle|^2 = \frac{(-2 \pm \sqrt{3})^2}{20}$$

Luego:

$$\langle y' | R \rangle = -\sin(\frac{\pi}{6})\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\cos(\frac{\pi}{6}) \quad \Longrightarrow \quad P_5 \equiv |\langle y' | R \rangle|^2 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

Finalmente:

$$\langle R | y \rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad P_6 \equiv |\langle R | y \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$P_{Total2} \equiv P_4.P_5.P_6 \quad \Longrightarrow \quad P_{Total2} = \frac{(-2 \pm \sqrt{3})^2}{80}$$

Ahora la probabilidad de transmisión depende de la elección de θ y ϕ del inciso a), y, como $P_{Total1} \neq P_{Total2}$, llegamos a la conclusión de que la probabilidad de transmisión depende del orden de los polarizadores.

2.4 Inciso d)

Como el polarizador R se encuentra en la mitad del proceso, basta con ver si se modifican las probabilidades al cambiar el polarizador R por uno L en la interaccion con y', y:

$$\langle y | L \rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad |\langle y | L \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\langle y' | L \rangle = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad |\langle y' | L \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

Observando el inciso b) y c) vemos que las probabilidades no cambian, por lo tanto, intercambiar un polarizador R por uno L no modifica la probabilidad total de transmisión.

Se puede probar, que cualquier estado linealmente polarizado pasa por un polarizador circular con probabilidad $\frac{1}{2}$, en otras palabras, para un estado circular, todas las lineales son lo mismo.