Problema XIII (b)

P13 (a) Considere un operador tal que $A^2 = \mathbb{I}$ (dé un ejemplo concreto de un operador de este tipo). Demuestre que para todo número complejo α y cualquier función f que pueda ser expresada en serie de potencias de su argumento vale que

$$f(\alpha A) = \frac{1}{2}(f(\alpha) + f(-\alpha))\mathbb{I} + \frac{1}{2}(f(\alpha) - f(-\alpha))A$$

En particular muestre que: $e^{-i\alpha A} = \cos(\alpha)\mathbb{I} - i\sin(\alpha)A$.

(b) Considere un operador B tal que $B^3 = B$ (¿podría dar un ejemplo?). Demuestre que para todo número complejo α y cualquier función f que pueda ser expresada en serie de potencias de su argumento vale que

$$f(\alpha B) = f(0)\mathbb{I} + \left(\frac{1}{2}(f(\alpha) + f(-\alpha)) - f(0)\right) B^2 + \frac{1}{2}(f(\alpha) - f(-\alpha))\, B$$

En particular muestre que: $e^{-i\alpha B} = \mathbb{I} + (\cos(\alpha) - 1)B^2 - i\sin(\alpha)B$.

¿Es equivalente la condición $\mathrm{B}^3 = B$ con respecto a $\mathrm{B}\left(B^2 - \mathbb{I}\right) = 0$?

¡No! A diferencia de lo que ocurre en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, pueden existir dos matrices $M_1 \neq 0$ y $M_2 \neq 0$ tales que $M_1 M_2 = 0$.

Por ejemplo: $\mathrm{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Problema XIII (b)

Caso impar: Primero veamos que si n es impar entonces se cumple $B^n = B$

Esto es equivalente a probar que: $\mathrm{B}^{2i+1} = B$ n=2i+1 (n impar)

Usemos inducción:

- Para i=0: $\mathrm{B}^{0+1} = B$ (trivial)

- Ahora supongamos que se cumple $\mathrm{B}^{2i+1} = B$ y veamos qué pasa en i+1

$$\mathrm{B}^{2(i+1)+1} = B^{2i+3} = B^{2i}\underbrace{B^3}_{B} = B^{2i+1} = B$$

y tenemos entonces el paso inductivo completado.

Caso par: Como $\mathrm{B}^{2i+1} = B$ entonces para potencias pares tenemos:

$$\mathrm{B}^{2i} = \underbrace{B^{2i-1}}_{B}B = BB = B^2, \quad i \geq 1$$

El único caso no contenido en los anteriores es n = 0 que naturalmente da $\mathrm{B}^0 = \mathbb{I}$

¡Usemos estos resultados para calcular f(αB)!

Problema XIII (b)

Asumiendo que f(αB) se escribe como serie de potencias, tenemos:

$$\mathrm{f}(\alpha B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!}(\alpha B)^n = f_0\mathbb{I} + \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_{2i+1}}{2i+1!}(\alpha)^{2i+1} \right)}_{x(\alpha)} B + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_{2i}}{2i!}(\alpha)^{2i} \right)}_{y(\alpha)} B^2$$

Para todo operador B tal que $B^3 = B$ $\Longrightarrow$ $\mathrm{f}(\alpha B) = f_0\mathbb{I} + x(\alpha)B + y(\alpha)B^2$

Falta solamente calcular x(α) e y(α). Antes notemos que:

$$\mathrm{x}(-\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_{2i+1}}{2i+1!}(-\alpha)^{2i+1} = -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_{2i+1}}{2i+1!}(\alpha)^{2i+1} = -x(\alpha)$$ **(función impar)**

$$\mathrm{y}(-\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_{2i}}{2i!}(-\alpha)^{2i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_{2i}}{2i!}(\alpha)^{2i} = y(\alpha)$$ **(función par)**

Además es claro que

$$f(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!}(\alpha)^n = f_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_{2i+1}}{2i+1!}(\alpha)^{2i+1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_{2i}}{2i!}(\alpha)^{2i}$$
$$= f(0) + x(\alpha) + y(\alpha)$$

Problema XIII (b)

Si aplicamos la paridad de x e y tenemos:

f(-$\alpha) = f(0) - x(\alpha) + y(\alpha)$

Sumando y restando estos dos resultado podemos despejar x(α) e y(α):

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(-\alpha) = 2x(\alpha) &\quad \rightarrow \quad x(\alpha) = \tfrac{1}{2}(f(\alpha) - f(-\alpha)) \\ f(\alpha) + f(-\alpha) = 2f(0) + 2y(\alpha) &\quad \rightarrow y(\alpha) = \tfrac{1}{2}(f(\alpha) + f(-\alpha)) - f(0). \end{aligned}$$

Finalmente, si juntamos todo obtenemos que:

$$\mathrm{f}(\alpha B) = f(0)\mathbb{I} + \tfrac{1}{2}(f(\alpha) - f(-\alpha))B + \left(\tfrac{1}{2}(f(\alpha) + f(-\alpha)) - f(0)\right) B^2$$

como queríamos probar!

Comentarios:

- Si $\mathrm{B}^2 = \mathbb{I}$, recuperamos lo pedido por el ítem (a)
- Si f(x) = e^{-ix} , tenemos: $\mathrm{e}^{-i\alpha B} = \mathbb{I} - i\sin(\alpha)B + (\cos(\alpha) - 1)B^2$