# Postulados de la mecánica cuántica

**Postulado 1:** **Estados físicos** representados por vectores de norma 1 (|ψ>) que pertenecen a un espacio de Hilbert H, con dimensión dada por la máxima cantidad de resultados mutuamente exclusivos en una medición.

**Postulado 2:** **Observables** representados por operadores lineales hermíticos sobre H → Dado un observable A, su operador es diagonalizable y posee un espectro real $\{a_i\}$, que representa los posibles resultados de medir A sobre el sistema.

$$\mathrm{A}|a_i\rangle = a_i\,|a_i\rangle\,, \quad \langle a_i \mid a_j\rangle = \delta_{ij}$$ **(caso no degenerado)**

La descomposición espectral de A es: $\mathrm{A}=\sum_i a_i\,|a_i\rangle\,\langle a_i|$

**Postulado 3 (Regla de Born):** Si el estado del sistema es |ψ> y medimos A, la **probabilidad** de obtener el resultado $a_i$ es:

$$\mathrm{P}(\mathrm{a}_i|\psi) = \langle\psi|\,\widehat{P}_{a_i}\,|\psi\rangle = \langle\psi|\,a_i\rangle\langle a_i\,|\psi\rangle = |\,\langle\psi|\,a_i\rangle|^2$$ **(caso no degenerado)**

**Postulado 4:** Si el estado del sistema es |ψ>, medimos A y obtenemos el resultado $a_i$, entonces el **estado después de la medición** es el autovector $|a_i>$.

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{mido } A \text{ obtengo } a_i} |a_i\rangle$$

# Caso degenerado

**¿Qué quiere decir que un operador tenga un espectro degenerado?**

$$\mathrm{A}|\psi_1\rangle = a\,|\psi_1\rangle\,, \quad A\,|\psi_2\rangle = a\,|\psi_2\rangle$$

Tengo dos autovectores LI, asociados a un mismo autovalor.

**¿Cómo escribo la descomposición espectral de un operador con espectro degenerado?**

Sea deg($a_i$) la degeneración del autovalor $a_i$ y $\Pi_i$ el proyector asociado a todo ese subespacio degenerado $\Rightarrow$ $\mathrm{A}{=}\sum_i a_i \Pi_i$

**¿Cómo escribir el proyector $\Pi_i$?**

Sea |i,k> una base del subespacio degenerado sobre el autovalor $a_i$:

$$\{|i,k\rangle, k=1,\ldots,\deg(a_i)\} \Rightarrow \Pi_i = \sum_{k=1}^{\deg(a_i)} |i,k\rangle\langle i,k| \text{ con } \langle i,k' \mid i,k\rangle = \delta_{k,k'}$$

La descomposición espectral completa de un operador A con espectro degenerado es: $\mathrm{A}{=}\sum_i \sum_{k=1}^{\deg(a_i)} a_i |i,k\rangle\langle i,k|$

Un ejemplo sencillo: $\mathrm{A}{=}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \Pi_3 = |1\rangle\langle 1|, \quad \Pi_5 = |2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3|$

# Caso degenerado

**¡Generalicemos los postulados al caso degenerado!**

**Postulado 3 (Regla de Born):** Si el estado del sistema es |ψ> y medimos A, la **probabilidad** de obtener el resultado $a_i$ es:

$\mathrm{P}(a_i \mid \psi) = \langle \psi \,| \Pi_i |\, \psi \rangle$ con $\Pi_i$ el proyector sobre el subespacio de autovalor $a_i$

$$\mathrm{P}(a_i|\psi) = \langle\psi|(\textstyle\sum_k |i,k\rangle\langle i,k|)|\psi\rangle = \sum_k \langle\psi||i,k\rangle\langle i,k||\psi\rangle = \sum_k |\langle i,k|\psi\rangle|^2$$

**Postulado 4:** Si el estado del sistema es |ψ>, medimos A y obtenemos el resultado $a_i$, entonces el **estado después de la medición** es la proyección de |ψ> sobre el subespacio de autovalor $a_i$ (normalizado)

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{mido } A \text{ obtengo } a_i} \frac{1}{\sqrt{P(a_i|\psi)}} \Pi_i \,|\psi\rangle$$

**Nota:** Estas expresiones incluyen el caso no degenerado de antes.

**¡Apliquemos estos postulados a problemas particulares!**

# Problema II

**P2** Considere un sistema físico cuyo espacio de estados es de dimensión 3 y sea $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ una base ortonormal. Sean $B = b\,|1\rangle\langle 1| + a\,|2\rangle\langle 3| + a\,|3\rangle\langle 2|$ y $A = a\,|1\rangle\langle 1| - ia\,|2\rangle\langle 3| + ia\,|3\rangle\langle 2|$ (con $a$ y $b \in \mathbb{R}$) dos observables y suponga que el sistema se encuentra inicialmente en el estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|3\rangle$$

**(a)** Calculemos los autoestados y autovalores de B. ¿Está degenerado el espectro de B?

$$\mathrm{B} = \mathrm{b}\ \ |1\rangle\langle 1| + a\,|2\rangle\langle 3| + a\,|3\rangle\langle 2| \Longrightarrow \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Solo falta diagonalizar un bloque de 2x2 ($\sigma_x$)

$$\begin{vmatrix} -\lambda & a \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a^2 = 0 \implies \lambda = \pm a$$ con los autoestados: $|\phi_{\pm a}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle \pm |3\rangle)$

El espectro **NO es degenerado** y la base de autoestados es:

$$\begin{cases} |\phi_{+b}\rangle = |1\rangle \implies & B\,|\phi_{+b}\rangle = b\,|\phi_{+b}\rangle\,, \\ |\phi_{+a}\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + |3\rangle) \implies & B\,|\phi_{+a}\rangle = a\,|\phi_{+a}\rangle\,, \\ |\phi_{-a}\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle - |3\rangle) \implies & B\,|\phi_{-a}\rangle = -a\,|\phi_{-a}\rangle\,. \end{cases}$$

# Problema II

**(b)** Escriba |ψ> en una base de autoestados de B.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|3\rangle$$

**Método principal:** Usar la expresión general de la expansión de un vector en una base ortonormal

(o también podemos despejar una base en función de la otra con un sistema de ecuaciones)

$$|\psi\rangle = \mathbb{I}\,|\psi\rangle = \sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|\,|\psi\rangle$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = \langle\phi_{+b}|\psi\rangle\,|\phi_{+b}\rangle + \langle\phi_{+a}|\psi\rangle\,|\phi_{+a}\rangle + \langle\phi_{-a}|\psi\rangle\,|\phi_{-a}\rangle$$

$$\langle\phi_{+b}| = \langle 1|$$

$$\langle\phi_{+a}| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 2| + \langle 3|) \Rightarrow |\psi\rangle = \frac{1}{2}|\phi_{+b}\rangle + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)}_{C_1}|\phi_{+a}\rangle + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)}_{C_2}|\phi_{-a}\rangle$$

$$\langle\phi_{-a}| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 2| - \langle 3|)$$

---

**(c)** Si medimos B sobre |ψ>, ¿qué resultados podemos obtener y con qué probabilidad?

$$\begin{cases} P(+b\mid\psi) = |\langle\psi|\,\phi_{+b}\rangle|^2 = 1/4 \\ P(+a\mid\psi) = |\langle\psi|\,\phi_{+a}\rangle|^2 = |C_1|^2 = 3/8 \\ P(-a\mid\psi) = |\langle\psi|\,\phi_{-a}\rangle|^2 = |C_2|^2 = 3/8 \end{cases}$$

# Problema II

**(d)** Si medimos B sobre |ψ> y obtenemos -a, ¿cuál es el estado después de la medición? ¿Y si obtenemos +a?

$$|\psi\rangle = \tfrac{1}{2}|\phi_{+b}\rangle + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}+\frac{i}{\sqrt{2}})}_{C_1}|\phi_{+a}\rangle + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}-\frac{i}{\sqrt{2}})}_{C_2}|\phi_{-a}\rangle$$

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{mido } B \text{ y obtengo } +a} |\phi_{+a}\rangle \qquad |\psi\rangle \xrightarrow{\text{mido } B \text{ obtengo } -a} |\phi_{-a}\rangle$$

---

**(e)** ¿Pero qué pasaría si el observable tiene un espectro degenerado? Ej:

$$\mathrm{A} = \mathrm{a}\ \ |1\rangle\langle 1| - ia\,|2\rangle\langle 3| + ia\,|3\rangle\langle 2| \Longrightarrow \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ia \\ 0 & ia & 0 \end{pmatrix}$$

Solo falta diagonalizar un bloque de 2x2 ($\sigma_y$): autovalores ±a

El espectro ahora **ES degenerado** y la base de autoestados es:

$$\begin{cases} \left|\xi_{+a}^{(1)}\right\rangle = |1\rangle \implies & A\left|\xi_{+a}^{(1)}\right\rangle = a\left|\xi_{+a}^{(1)}\right\rangle, \\ \left|\xi_{+a}^{(2)}\right\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + i\,|3\rangle) \implies & A\left|\xi_{+a}^{(2)}\right\rangle = a\left|\xi_{+a}^{(2)}\right\rangle, \\ |\xi_{-a}\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle - i\,|3\rangle) \implies & A\,|\xi_{-a}\rangle = -a\,|\xi_{-a}\rangle. \end{cases}$$

# Problema II

Si medimos A (observable degenerado) sobre |ψ>, ¿qué resultados podemos obtener y con qué prob.?

**Ayuda memoria:**

$$\langle\psi| = \frac{1}{2}\langle 1| + \frac{1}{2}\langle 2| + \frac{-i}{\sqrt{2}}\langle 3|$$

$$\left|\xi_{+a}^{(1)}\right\rangle = |1\rangle$$

$$\left|\xi_{+a}^{(2)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + i|3\rangle)$$

$$|\xi_{-a}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle - i|3\rangle)$$

Puedo obtener +a (**degenerado**) o -a, con probs:

$$P(+a|\psi) = \langle\psi|\Pi_{+a}^{A}|\psi\rangle$$

$$= \left\langle\psi\right|\underbrace{\left(\left|\xi_{+a}^{(1)}\right\rangle\left\langle\xi_{+a}^{(1)}\right| + \left|\xi_{+a}^{(2)}\right\rangle\left\langle\xi_{+a}^{(2)}\right|\right)}_{\Pi_{+a}^{A}}\left|\psi\right\rangle$$

$$= \left|\left\langle\psi\left|\xi_{+a}^{(1)}\right.\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle\psi\left|\xi_{+a}^{(2)}\right.\right\rangle\right|^2 \simeq 0.9786$$

$$\mathrm{P}(-a|\psi) = \langle\psi|\Pi_{-a}^{A}|\psi\rangle = \langle\psi\underbrace{|\xi_{-a}\rangle\langle\xi_{-a}|}_{\Pi_{-a}^{A}}\psi\rangle = |\langle\psi|\xi_{-a}\rangle|^2 \simeq 0.0214$$

Los estados después de la medición serán:

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{mido } A \text{ obtengo } +a} \frac{1}{\sqrt{P(+a|\psi)}}\Pi_{+a}|\psi\rangle$$

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{mido } A \text{ obtengo } -a} \frac{1}{\sqrt{P(-a|\psi)}}\Pi_{-a}|\psi\rangle$$

# Problema II

**(f)** Si sobre el estado inicial |ψ> se mide primero B y luego A obteniéndose {a, -a}, calcule la prob. de ese resultado. Y si se mide primero A y luego B con el mismo estado inicial |ψ>, ¿es posible encontrar como resultado el par {-a, a}? si es así ¿con qué prob.? ¿Son los operadores B y A compatibles?

$\mathrm{A} = \sum_i a_i \Pi_i^A, \qquad B = \sum_j b_j \Pi_j^B$ (descomposición espectral de los observables)

<u>**Caso 1:**</u> Primero mido B y luego mido A. La prob. de medir +b dado |ψ> era:

$$\mathrm{P}(+a|\psi) = \langle\psi|\Pi^B_{+a}|\psi\rangle = |\langle\psi|\,\phi_{+a}\rangle|^2 = 3/8$$ (no había degeneración)

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{mido } B \text{ y obtengo } +a} |\phi_{+a}\rangle$$

Equivalente a haber calculado:

$$|\phi_{+a}\rangle = \frac{1}{\sqrt{P(+a|\psi)}}\Pi^B_{+a}\,|\psi\rangle$$

Ahora mido A, la prob. de medir -a dado $|\Phi_{+a}>$ es:

$$\mathrm{P}(-a|\phi_{+a}) = \langle\phi_{+a}|\Pi^A_{-a}|\phi_{+a}\rangle = |\langle\phi_{+a}|\,\xi_{-a}\rangle|^2 = 1/2$$

$$|\phi_{+a}\rangle \xrightarrow{\text{mido } A \text{ y obtengo } -a} \left|\tilde{\psi}_{-a}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{P(-a|\phi_{+a})}}\Pi^A_{-a}\,|\phi_{+a}\rangle$$

La **prob. total** del caso 1 es: $\mathrm{P}(\{+a,-a\}|\psi) = P(+a|\psi)\;P(-a|\phi_{+a}) = 3/16$

# Problema II

**<u>Caso 2:</u>** Primero mido A y luego mido B. La prob. de medir -a dado |ψ> era:

$$\mathrm{P}(-a|\psi) = \langle\psi|\Pi^A_{-a}|\psi\rangle = \left|\left\langle\psi\,|\xi_{-a}\right\rangle\right|^2 \simeq 0.0214$$

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{mido } A \text{ y obtengo } -a} \left|\tilde{\psi}_{-a}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{P(-a|\psi)}}\Pi^A_{-a}\,|\psi\rangle = |\xi_{-a}\rangle$$

Ahora mido B, la prob. de medir +a dado $|\xi_{-a}>$ es:

$$\mathrm{P}(+a|\xi_{-a}) = \langle\xi_{-a}|\Pi^B_{+a}|\xi_{-a}\rangle = |\langle\xi_{-a}|\,\phi_{+a}\rangle|^2 = 1/2$$

La **prob. total** del caso 2 es: $\mathrm{P}(\{-a,+a\}|\psi) = P\,(-a|\psi)\;P\,(+a|\xi_{-a}) \simeq \frac{0.0214}{2}$

$$\Longrightarrow\quad \mathrm{P}(\{+a,-a\}|\psi) \neq P\,(\{-a,+a\}|\psi)$$

Los operadores A y B son incompatibles!

**Moraleja:**

$$[A,B]=0 \quad\Longleftrightarrow\quad P\,(\{a_i,b_j\}|\psi) = P\,(\{b_j,a_i\}|\psi) \quad \forall\,|\psi\rangle$$

$$[A,B]\neq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \exists\,|\psi\rangle \quad \text{s.t.} \quad P\,(\{a_i,b_j\}|\psi) \neq P\,(\{b_j,a_i\}|\psi)$$