Física Teórica 2 - Guía 1: Dimensión 2

Federico Petrovich

8 de abril de 2021

Problema 9

En el ítem a, basta con notar que

$$[A, B] = AB - BA \tag{1}$$

y por lo tanto

$$AB = [A, B] + BA. \tag{2}$$

En cuanto al e,

$$[AB, C] = ABC - CAB = A\left([B, C] + CB\right) - \left(AC - [A, C]\right)B = A\,[B, C] + [A, C]\,B. \tag{3}$$

Problema 10

En primer lugar, notar que si una matriz A conmuta con otra matriz C, entonces A^m también conmuta con C. Esto se deduce o bien usando que la base de autoestados de A^m es la misma que la de A (lo cual implica que A^m y C tienen una base completa de autoestados en común y por ende conmutan), o bien usando el ítem e del problema 9

$$[A^m, C] = \left[AA^{m-1}, C\right] = A\left[A^{m-1}, C\right] + [A, C]\,A^{m-1} = A\left[A^{m-1}, C\right]. \tag{4}$$

Por ejemplo para $m = 2$ se tiene que $\left[A^2, C\right] = A\,[A, C] = 0$ y así siguiendo de forma recursiva se prueba que $[A^m, C] = 0$.

Habiendo hecho esto, se va a probar lo que pide el problema por inducción, sabiendo que $[A^m, [A, B]] = 0$ y por lo tanto

$$A^m\,[A, B] = [A, B]\,A^m. \tag{5}$$

Sea $p\,(m)$ la siguiente afirmación

$$[A^m, B] = mA^{m-1}\,[A, B]. \tag{6}$$

Se ve que $p\,(1)$ es verdadera ya que queda $[A, B] = [A, B]$. Basta con probar entonces que si $p\,(m)$ es verdadera, entonces $p\,(m + 1)$ también lo es. En efecto, la afirmación $p\,(m + 1)$ es

$$\left[A^{m+1}, B\right] = (m + 1)\,A^m\,[A, B], \tag{7}$$

o bien,

$$\left[A^{m+1}, B\right] = mAA^{m-1}\,[A, B] + A^m\,[A, B]. \tag{8}$$

Como se está asumiendo que $p\,(m)$ es verdadera, se tiene que

$$mA^{m-1}\,[A, B] = [A^m, B] \tag{9}$$

y por lo tanto reemplazando queda que $p\,(m + 1)$ resulta

$$\left[A^{m+1}, B\right] = A\,[A^m, B] + A^m\,[A, B]. \tag{10}$$

Usando ahora lo que se probó anteriormente $A^m\,[A, B] = [A, B]\,A^m$ se obtiene

$$\left[A^{m+1}, B\right] = A\,[A^m, B] + [A, B]\,A^m \tag{11}$$

y esto es verdadero debido al ítem e del problema 9. Finalmente, se demuestra lo pedido.

Para la segunda parte, basta con notar que

$$[f\,(A), B] = \left[\sum_k f_k A^k, B\right] = \sum_k \frac{f^{(k)}\,(0)}{k!}\left[A^k, B\right] = \sum_k f_k\left[A^k, B\right] = \sum_k f_k k A^{k-1}\,[A, B] = \frac{df}{dA}\,(A)\,[A, B], \tag{12}$$

donde $f_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ son los coeficientes de la expansión de Taylor alrededor del origen.