Física Teórica 2 - Guía 3: Postulados de la Mecánica Cuántica

Federico Petrovich

20 de abril de 2021

Problema 10

a) En primer lugar, notar que

$$|\psi(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2}\right) \tag{1}$$

y que

$$\langle x\rangle = \int dx\, |\psi(x)|^2 x = \cdots = x_0, \tag{2}$$

donde esta cuenta esta hecha en el apunte «http://materias.df.uba.ar/ft2a2021c1/files/2021/04/FT2_Guia2_P16-.pdf».

En segundo lugar, la desviación estandar $\mathrm{Sdv}(x)$ está dada por

$$\mathrm{Sdv}^2(x) = \left\langle (x-\langle x\rangle)^2 \right\rangle = \int dx\, |\psi(x)|^2 (x-x_0)^2 = \cdots = \sigma_x^2, \tag{3}$$

es decir, la desviación estandar vale σ_x. Para hacer esta cuenta conviene usar que

$$\int dx \exp\left(-\lambda(x-x_0)^2\right)(x-x_0)^2 = -\int dx \frac{d}{d\lambda}\exp\left(-\lambda(x-x_0)^2\right) = -\frac{d}{d\lambda}\int dx \exp\left(-\lambda(x-x_0)^2\right) = -\frac{d}{d\lambda}\int dy \exp\left(-\lambda y^2\right) \tag{4}$$

y esta última integral también está hecha en «http://materias.df.uba.ar/ft2a2021c1/files/2021/04/FT2_Guia2_P16-.pdf».

b) Tampoco se va a resolver en detalle, pero usando las propiedades de la transformada de Fourier que da el ejercicio se demuestra que

$$\left|\tilde{\psi}(p)\right|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_p^2}} \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{2\sigma_p^2}\right), \tag{5}$$

donde $\sigma_p = \frac{\hbar}{2\sigma_x}$ es la desviación estandar de la distribución de probabilidades del impulso.

c) Como las desviaciones estandar de ambas distribuciones son σ_x y σ_p respectivamente y $\sigma_p = \frac{\hbar}{2\sigma_x}$, entonces se demuestra lo pedido.

d) Por un lado,

$$\langle x|\Delta\hat{x}|\psi\rangle = \langle x|\hat{x}-\langle x\rangle|\psi\rangle = \langle x|\hat{x}|\psi\rangle - \langle x|\langle x\rangle|\psi\rangle = x\psi(x) - \langle x\rangle\psi(x) = (x-x_0)\psi(x). \tag{6}$$

Por el otro,

$$\begin{aligned}\langle x|\Delta\hat{p}|\psi\rangle = \langle x|\hat{p}-\langle p\rangle|\psi\rangle = \langle x|\hat{p}|\psi\rangle - \langle x|\langle p\rangle|\psi\rangle = -\imath\hbar\tfrac{d\psi}{dx}(x) - \langle p\rangle\psi(x) = -\imath\hbar\left(\tfrac{\imath p_0}{\hbar} - \tfrac{(x-x_0)}{2\sigma_x^2}\right)\psi(x) - p_0\psi(x) \\ = \imath\hbar\tfrac{(x-x_0)}{2\sigma_x}\psi(x).\end{aligned} \tag{7}$$

Luego,

$$\langle x|\Delta\hat{x}|\psi\rangle = \frac{2\sigma_x}{\imath\hbar}\langle x|\Delta\hat{p}|\psi\rangle \tag{8}$$

y como $\{|x\rangle\}$ es una base completa entonces

$$\Delta\hat{x}|\psi\rangle = \frac{2\sigma_x}{\imath\hbar}\Delta\hat{p}|\psi\rangle. \tag{9}$$

e) Por lo hecho anteriormente, la condición de incerteza mínima implica en general

$$(x-\langle x\rangle)\psi(x) = -\imath\hbar c\frac{d\psi}{dx}(x) - c\langle p\rangle\psi(x) \tag{10}$$

y por lo tanto

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{\imath\hbar c}\left(\langle x\rangle - c\,\langle p\rangle - x\right)\psi. \tag{11}$$

Esta es una ecuación diferencial cuya solución resulta

$$\psi\left(x\right) = A\exp\left(\frac{1}{\imath\hbar c}\left[\left(\langle x\rangle - c\,\langle p\rangle\right)x - \frac{x^2}{2}\right]\right) \tag{12}$$

y esto no es otra cosa más que una Gaussiana cuando c es un imaginario puro (tomando $c = \frac{2\sigma_x}{\imath\hbar}$ se obtiene la función de onda del problema).