Física Teórica 2 - Guía 4: Postulados – Matriz Densidad

Federico Petrovich

20 de abril de 2021

Problema 4

a) La matriz densidad en este caso está dada por

$$\rho = \frac{3}{4} \left|+\right\rangle \left\langle+\right| + \frac{1}{4} \left|-\right\rangle \left\langle-\right| . \tag{1}$$

b) Sabiendo que el estado de un spin en dirección $\hat{\mathbf{n}} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ se escribe como

$$\left|+, \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right\rangle = \cos\frac{\theta}{2} \left|+\right\rangle + e^{\imath\phi} \sin\frac{\theta}{2} \left|-\right\rangle \tag{2}$$

y comparando con los estados $\left|a\right\rangle$ y $\left|b\right\rangle$ se puede ver que $\phi_a = \phi_b = 0$ y que $\theta_a = \frac{\pi}{3}$, $\theta_b = -\frac{\pi}{3}$. Por lo tanto,

$$\left|a\right\rangle = \left|+, \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}_a\right\rangle \tag{3}$$

y

$$\left|b\right\rangle = \left|+, \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}_b\right\rangle , \tag{4}$$

donde

$$\hat{\mathbf{n}}_a = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{z}} \tag{5}$$

y

$$\hat{\mathbf{n}}_b = -\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{z}}. \tag{6}$$

La matriz densidad en este caso está dada por

$$\begin{gathered}
\rho = \tfrac{1}{2} \left|a\right\rangle \left\langle a\right| + \tfrac{1}{2} \left|b\right\rangle \left\langle b\right| = \tfrac{1}{2} \left[\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} \left|+\right\rangle + \tfrac{1}{2} \left|-\right\rangle \right) \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} \left\langle+\right| + \tfrac{1}{2} \left\langle-\right| \right) + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} \left|+\right\rangle - \tfrac{1}{2} \left|-\right\rangle \right) \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} \left\langle+\right| - \tfrac{1}{2} \left\langle-\right| \right) \right] \\
= \tfrac{1}{8} \left[\left(\sqrt{3} \left|+\right\rangle + \left|-\right\rangle\right) \left(\sqrt{3} \left\langle+\right| + \left\langle-\right|\right) + \left(\sqrt{3} \left|+\right\rangle - \left|-\right\rangle\right) \left(\sqrt{3} \left\langle+\right| - \left\langle-\right|\right) \right] \\
= \tfrac{1}{8} \left[\left(3 \left|+\right\rangle \left\langle+\right| + \sqrt{3} \left|+\right\rangle \left\langle-\right| + \sqrt{3} \left|-\right\rangle \left\langle+\right| + \left|-\right\rangle \left\langle-\right|\right) + \left(3 \left|+\right\rangle \left\langle+\right| - \sqrt{3} \left|+\right\rangle \left\langle-\right| - \sqrt{3} \left|-\right\rangle \left\langle+\right| + \left|-\right\rangle \left\langle-\right|\right) \right] \\
= \tfrac{1}{8} \left(6 \left|+\right\rangle \left\langle+\right| + 2 \left|-\right\rangle \left\langle-\right|\right) = \tfrac{3}{4} \left|+\right\rangle \left\langle+\right| + \tfrac{1}{4} \left|-\right\rangle \left\langle-\right| .
\end{gathered} \tag{7}$$

c) Comparando ambas matrices densidades, se puede ver que son iguales. Como toda la información del sistema está contenida dentro de esta matriz, la conclusión es entonces que en un ensamble estadístico es imposible distinguir los estados que lo forman.