Física Teórica II

Guía 3: Postulados

Nicolás Mirkin

27 de abril de 2021

Problema XV

Tengo un estado inicial:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |111\rangle)$$

Hay 3 laboratorios (A,B y C), que pueden medir σ_x o σ_y.
Por ejemplo:

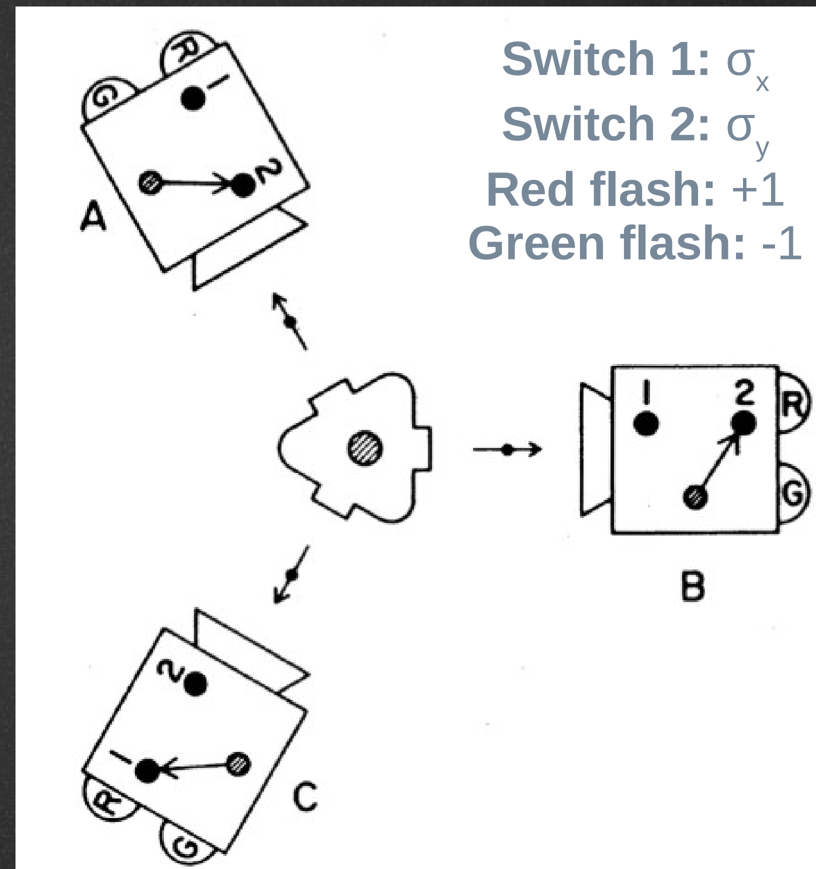
$$\left.\begin{aligned} O_1 &= \sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y \\ O_2 &= \sigma_y \otimes \sigma_x \otimes \sigma_y \\ O_3 &= \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x \\ O_4 &= \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x \end{aligned}\right\}$$

Todos conmutan entre sí, no importa el orden de las mediciones.

(a) Veamos si |ψ> es autoestado de todos los operadores O, es decir:

$$O_1 |\psi\rangle = o_1 |\psi\rangle \qquad O_2 |\psi\rangle = o_2 |\psi\rangle$$

$$O_3 |\psi\rangle = o_3 |\psi\rangle \qquad O_4 |\psi\rangle = o_4 |\psi\rangle$$



Mermin, N. D. (1990). Simple unified form for the major no-hidden-variables theorems. Physical review letters, 65(27), 3373.

Problema XV

$$O_1 = \sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y = \sigma_x^{(A)}\sigma_y^{(B)}\sigma_y^{(C)}$$

$$O_4 = \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x = \sigma_x^{(A)}\sigma_x^{(B)}\sigma_x^{(C)}$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |111\rangle)$$

Veamos que |ψ> es autoestado de O_1 y O_4 :

$$O_1 |\psi\rangle = \left(\sigma_x^{(A)}\sigma_y^{(B)}\sigma_y^{(C)}\right)|\psi\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(i^2|111\rangle - i^2|000\rangle) = +|\psi\rangle$$ (autovalor +1)

Lo mismo con O_2 y O_3 (tienen autovalor +1)

En cuanto a O_4: $O_4|\psi\rangle = \left(\sigma_x^{(A)}\sigma_x^{(B)}\sigma_x^{(C)}\right)|\psi\rangle$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|111\rangle - |000\rangle) = -|\psi\rangle$$ (autovalor -1)

Ayuda memoria:

$$\sigma_x^{(A)} = \sigma_x \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$$
$$\sigma_x^{(B)} = \mathbb{I} \otimes \sigma_x \otimes \mathbb{I}$$
$$\sigma_x^{(C)} = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \sigma_x$$
$$\sigma_y^{(A)} = \sigma_y \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$$
$$\sigma_y^{(B)} = \mathbb{I} \otimes \sigma_y \otimes \mathbb{I}$$
$$\sigma_y^{(C)} = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \sigma_y$$

$$\sigma_x|0\rangle = |1\rangle$$
$$\sigma_x|1\rangle = |0\rangle$$
$$\sigma_y|0\rangle = i|1\rangle$$
$$\sigma_y|1\rangle = -i|0\rangle$$

Problema XV

(b) Suponga que en cada laboratorio se mide σ_x obteniendose los valores $m^{(A)}_x$, $m^{(B)}_x$ y $m^{(C)}_x$. ¿Cuanto vale el producto de estos tres valores medidos?

$$O_4 = \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x \Rightarrow$$

El producto de los tres valores tiene que valer -1, pues |ψ> es autoestado de O_4 con autovalor -1

Si en los laboratorios B y C mido el mismo autovalor (+1 o -1), en A la medición tiene que ser -1!

Combinación 1

$m^{(A)}_x = -1$

$m^{(B)}_x = +1$

$m^{(C)}_x = +1$

Combinación 2

$m^{(A)}_x = -1$

$m^{(B)}_x = -1$

$m^{(C)}_x = -1$

Si en los laboratorios B y C mido un autovalor distinto (+1 y -1), en A la medición tiene que ser +1!

Combinación 3

$m^{(A)}_x = +1$

$m^{(B)}_x = +1$

$m^{(C)}_x = -1$

Combinación 4

$m^{(A)}_x = +1$

$m^{(B)}_x = -1$

$m^{(C)}_x = +1$

Problema XV

(c) Suponga en cambio que en cada laboratorio se toma la decisión (de manera independiente y aleatoria) de medir σ_x o σ_y. Considere un experimento en el cual dos observadores miden σ_y y uno mide σ_x. ¿Cuanto vale el producto de los tres resultados?

$$O_1 = \sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y$$
$$O_2 = \sigma_y \otimes \sigma_x \otimes \sigma_y$$
$$O_3 = \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x$$

$\Rightarrow$ El producto de los tres resultados debe valer +1, pues |ψ> es autoestado de O_1 ,O_2 y O_3 con autovalor +1. Analicemos por ejemplo O_1:

Si en los laboratorios B y C mido el mismo autovalor (+1 o -1), en A la medición tiene que ser +1!

Combinación 1	**Combinación 2**
$m^{(A)}_x = +1$	$m^{(A)}_x = +1$
$m^{(B)}_y = +1$	$m^{(B)}_y = -1$
$m^{(C)}_y = +1$	$m^{(C)}_y = -1$

Si en los laboratorios B y C mido un distinto autovalor (+1 y -1), en A la medición tiene que ser -1!

Combinación 3	**Combinación 4**
$m^{(A)}_x = -1$	$m^{(A)}_x = -1$
$m^{(B)}_y = +1$	$m^{(B)}_y = -1$
$m^{(C)}_y = -1$	$m^{(C)}_y = +1$

Problema XV

(d) ¿El resultado de la medición de σ_x en A depende de cuál haya sido el observable que midieron B y C? ¿Qué nos dice nuestro sentido común?

Tengo dos observables compatibles con medir σ_x en A:

$$O_1 = \sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y$$

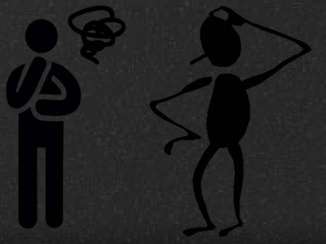
$$O_4 = \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x$$

Las mediciones en cada laboratorio son aleatorias e independientes → en el laboratorio A no sé qué voy a medir en B y C.

Analicemos un caso particular:
Supongamos que mido “algo” sobre B y C ($m^{(B)}_j$;$m^{(C)}_j$), obteniendo el mismo autovalor (+1 o-1). ¿Cuánto vale la medición de σ_x en A?

- Si sobre B y C medí σ_y (O_1), la medición en A debe dar $m^{(A)}_x$ =+1
- Si sobre B y C medí σ_x (O_4), la medición en A debe dar $m^{(A)}_x$ =-1

El resultado en A depende de los observables que medí aleatoriamente en B y en C.
¿Cómo se entera la partícula en A de esto?



Problema XV

¿Puedo asignar los valores antes de medir?

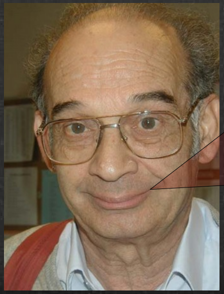
Veamos el caso general. Los valores medidos de σ_j en cada laboratorio los denominamos como: $\mathrm{m}_j^{(A,B,C)} = \pm 1$

$$\left.\begin{aligned} m_x^A m_y^B m_y^C &= +1 \\ m_y^A m_x^B m_y^C &= +1 \\ m_y^A m_y^B m_x^C &= +1 \end{aligned}\right\}$$

¿Es compatible esto con: $\mathrm{m}_x^A m_x^B m_x^C = -1$?

$$\left(m_x^A m_y^B m_y^C\right)\left(m_y^A m_x^B m_y^C\right)\left(m_y^A m_y^B m_x^C\right)$$
$$= m_x^A m_x^B m_x^C \underbrace{\left(m_y^A m_y^A\right)}_{+1}\underbrace{\left(m_y^B m_y^B\right)}_{+1}\underbrace{\left(m_y^C m_y^C\right)}_{+1} = +1$$

Ambas cosas parecen incompatibles.
Pero… ¿qué falló?



¡Experimentos que no se realizan no tienen resultados!
Los $\mathrm{m}_j^{(A,B,C)}$ son *valores potenciales* de experimentos, no *valores actuales*. No puedo asignarlos de antemano.

Física Teórica II

Guía 4: Matriz densidad

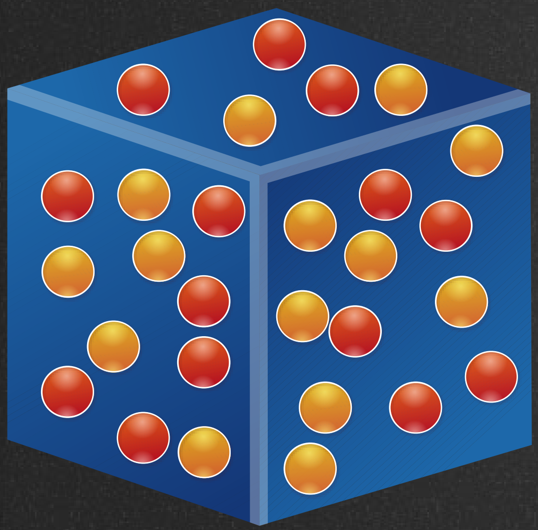
Nicolás Mirkin

27 de abril de 2021

Matriz densidad

<u>Motivación 1:</u>
Mezclas estadísticas

Queremos describir un estado que es una mezcla estadística.
Por ejemplo, imaginemos una caja:



en donde tengo 50% de probabilidad de obtener la bola amarilla (|+,z>) y 50% de obtener la bola roja (|-,z>)

$\rho =$ 50% $|+,z\rangle$ + 50% $|-,z\rangle$

Por otro lado, imaginemos el estado:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+,z\rangle + |-,z\rangle\right)$$

¿Son descripciones equivalentes?

Matriz densidad

Motivación 1:
Mezclas estadísticas

¿Cómo darnos cuenta si son equivalentes?
Podemos comparar las dos descripciones en términos de las probabilidades de los resultados de distintas mediciones

Por ejemplo, si mido S_z:

$\rho =$ 50% $|+,z\rangle$ + 50% $|-,z\rangle$

$$P(S_z = +\hbar/2) = \frac{1}{2}$$

$$P(S_z = -\hbar/2) = \frac{1}{2}$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+,z\rangle + |-,z\rangle\right)$$

$$P(S_z = +\hbar/2) = \frac{1}{2}$$

$$P(S_z = -\hbar/2) = \frac{1}{2}$$

Ok. Las probabilidades coinciden...

¿Y si mido otro observable?

En cambio, si mido S_x:

$$\rho = 50\% \; |+,z\rangle + 50\% \; |-,z\rangle$$

$$\begin{aligned} P\left(S_x = +\hbar/2\right) &= P\left(S_x = +\hbar/2 \| +,z\rangle\right) P\left(|+,z\rangle\right) \\ &\quad + P\left(S_x = +\hbar/2 \| -,z\rangle\right) P\left(|-,z\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \\ P\left(S_x = -\hbar/2\right) &= P\left(S_x = -\hbar/2 \| +,z\rangle\right) P\left(|+,z\rangle\right) \\ &\quad + P\left(S_x = -\hbar/2 \| -,z\rangle\right) P\left(|-,z\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+,z\rangle + |-,z\rangle\right) \rightarrow \begin{aligned} P(S_x = +\hbar/2) &= 1 \\ P(S_x = -\hbar/2) &= 0 \end{aligned}$$

Ojo! Ahora las probabilidades no coinciden.

Su representación matemática debe ser distinta

Matriz densidad

<u>Motivación 2:</u>
Estado de un subsistema de un sistema compuesto

Consideremos un sistema de dos partículas, A y B, que están en el estado:

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_A \otimes |-\rangle_B - |-\rangle_A \otimes |+\rangle_B\right)$$

Supongamos que medimos un cierto observable O_A (**cualquiera**) **solamente** sobre la partícula A. El valor medio de este observable lo calculamos como:

$$\langle O_A\rangle = \langle\psi_{AB}|O_A \otimes \mathbb{I}_B|\psi_{AB}\rangle$$

Análogamente, si |λ> es autoestado de O_A con autovalor λ, la probabilidad de medir λ es:

$$\mathrm{P}(\lambda) = \langle\psi_{AB}|(|\lambda\rangle\langle\lambda|_A \otimes \mathbb{I}_B)|\psi_{AB}\rangle$$

→ Calculemos esta probabilidad para el estado anterior y no perdamos de vista que la medición es completamente arbitraria.

La probabilidad de obtener el resultado λ en el estado singlete al medir el operador O_A es:

$$
\begin{aligned}
P(\lambda) &= \langle\psi_{AB}|(|\lambda\rangle\langle\lambda|_A \otimes \mathbb{I}_B)|\psi_{AB}\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle+|\otimes\langle-| - \langle-|\otimes\langle+|\right)\left(|\lambda\rangle\langle\lambda|_A \otimes \mathbb{I}_B\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle\otimes|-\rangle - |-\rangle\otimes|+\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big[\left(\langle+|\otimes\langle-|\right)\left(|\lambda\rangle\langle\lambda|\otimes\mathbb{I}\right)\left(|+\rangle\otimes|-\rangle\right) - \left(\langle+|\otimes\langle-|\right)\left(|\lambda\rangle\langle\lambda|\otimes\mathbb{I}\right)\left(|-\rangle\otimes|+\rangle\right) \\
&\quad - \left(\langle-|\otimes\langle+|\right)\left(|\lambda\rangle\langle\lambda|\otimes\mathbb{I}\right)\left(|+\rangle\otimes|-\rangle\right) + \left(\langle-|\otimes\langle+|\right)\left(|\lambda\rangle\langle\lambda|\otimes\mathbb{I}\right)\left(|-\rangle\otimes|+\rangle\right)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\langle+|\lambda\rangle\langle\lambda|+\rangle\underbrace{\langle-|-\rangle}_{1} - \langle+|\lambda\rangle\langle\lambda|-\rangle\underbrace{\langle-|+\rangle}_{0} \\
&\quad - \langle-|\lambda\rangle\langle\lambda|+\rangle\underbrace{\langle+|-\rangle}_{0} + \langle-|\lambda\rangle\langle\lambda|-\rangle\underbrace{\langle+|+\rangle}_{1}\Big] \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{\left[|\langle+|\lambda\rangle|^2 + |\langle-|\lambda\rangle|^2\right]}_{\sum_{\{+,-\}}\langle\lambda|n\rangle\langle n|\lambda\rangle = \langle\lambda|\lambda\rangle = 1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

El resultado de **cualquier** medición sobre la partícula A es equiprobable para los dos posibles resultados.
Hay incerteza total para **cualquier** medición sobre A.

<u>Notar:</u> No hay ningún vector en el espacio de Hilbert de dimension 2 (en el espacio de Hilbert de la partícula A) que satisfaga esta propiedad. Todo vector en el espacio de Hilbert es autoestado de algún observable.

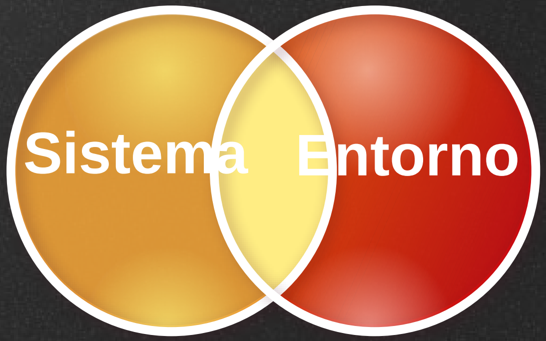
Por ejemplo, dado $|\psi\rangle$

siempre podremos definir un observable $\mathrm{O}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$

tal que $|\psi\rangle$ es autoestado (en este ejemplo con autovalor +1)

Pero recién vimos que **cualquier medición** sobre una sola de las partículas nos da que todos los resultados posibles son siempre equiprobables. Esto significa que si queremos describir el estado de la partícula A por sí sola, necesitamos utilizar una representación matemática distinta a la de vectores en el espacio de Hilbert que venimos utilizando hasta ahora.

Para describir subsistemas de un sistema compuesto (básicamente cualquier sistema real) es necesario extender nuestra definición de estado de un sistema cuántico.



Matriz densidad, preludio.

Sea Q un operador cualquiera y sean dos estados |α> |β> entonces vale que:

$$\mathrm{tr}\left(|\beta\rangle\langle\alpha|\ Q\right) = \langle\alpha|Q|\beta\rangle$$

Antes estudiemos ciertas propiedades.

<u>**Demostración:**</u>

$$\mathrm{tr}\left(|\beta\rangle\langle\alpha|\ Q\right) = \sum_n \langle n|\left(|\beta\rangle\langle\alpha|\ Q\right)|n\rangle = \sum_n \underbrace{\langle n|\beta\rangle}_{\in\mathbb{C}} \underbrace{\langle\alpha|\,Q\,|n\rangle}_{\in\mathbb{C}}$$

$$= \sum_n \underbrace{\langle\alpha|\,Q\,|n\rangle}_{\in\mathbb{C}} \underbrace{\langle n|\beta\rangle}_{\in\mathbb{C}} = \langle\alpha|Q \underbrace{\left(\sum_n |n\rangle\langle n|\right)}_{\mathbb{I}} |\beta\rangle$$

$$= \langle\alpha|Q|\beta\rangle$$ ✔

Matriz densidad, preludio.

Recordemos:

$$\mathrm{tr}\left(|\beta\rangle\langle\alpha|\ Q\right) = \ \langle\alpha|Q|\beta\rangle$$

Implicancia 1: El valor medio de un observable A en un estado |ψ> es:

$$\langle A\rangle_{\psi} = \ \langle\psi|A|\psi\rangle = \mathrm{tr}\left[|\psi\rangle\langle\psi|\ A\right]$$

Implicancia 2: Si |a> es autoestado de A con autovalor a, la probabilidad de medir A en |ψ> y obtener a es:

$$\begin{aligned} P\left(a|\psi\right) &= \left|\langle a|\psi\rangle\right|^2 = \langle a|\psi\rangle\,\langle\psi|a\rangle \\ &= \ \langle\psi|(|a\rangle\langle a|)|\psi\rangle \\ &= \mathrm{tr}\left[|\psi\rangle\langle\psi|\cdot|a\rangle\langle a|\right] \end{aligned}$$

Notar que la probabilidad es el “valor medio” del respectivo proyector, como ya sabemos.

Esto nos va a permitir una generalización natural al caso de mezclas estadísticas.

Matriz densidad, preludio.

Por otro lado… ¿qué sucede si tenemos una mezcla estadística de estados {|i>} con probabilidades {p_i}?

El valor medio de un observable A debería ser

$$\langle A \rangle = \sum_i p_i \langle A \rangle_i = \sum_i p_i \,\mathrm{tr}\left[|i\rangle\langle i|\; A\right]$$

$$= \mathrm{tr}\left[\sum_i p_i \,|i\rangle\langle i|\; A\right]$$

$$= \mathrm{tr}\left[\left(\sum_i p_i \,|i\rangle\langle i|\right) A\right]$$

Si definimos el operador $\rho = \sum_i p_i \,|i\rangle\langle i|$ ➡ $\langle A \rangle = \mathrm{tr}\left[\rho A\right]$

Esto inspira la definición formal que veremos a continuación

Matriz densidad, definición formal.

Dado un sistema físico, el estado del sistema más general posible se representa mediante un operador ρ que actúa sobre H tal que

$$
\begin{aligned}
\rho^\dagger &= \rho, & &\text{[hermiticidad]} \\
\operatorname{tr}\rho &= 1, & &\text{[normalizacion]} \\
\rho &\geq 0. & &\text{[positividad]}
\end{aligned}
$$

¿Cómo se calculan valores medios y probabilidades con este tipo de estados?

Sea un observable A con autovalores $\{a_i\}$ y autovectores $\{|a_i\rangle\}$

$$\mathrm{A} = \sum_i a_i \, |a_i\rangle\langle a_i|$$

Valor medio de A: $\langle A \rangle_\rho = \operatorname{tr}[\rho A]$

Probabilidad de medir a_i (sin degeneración)

$$\mathrm{P}(a_i|\rho) = \operatorname{tr}[\rho\, |a_i\rangle\langle a_i|] = \langle a_i|\rho|a_i\rangle$$

Probabilidad de medir a_i (con degeneración)

$$\mathrm{P}(a_i|\rho) = \operatorname{tr}[\rho \Pi_i]$$

Analicemos ahora sus propiedades!

Propiedad 1:

$$\rho^\dagger = \rho, \qquad \text{[hermiticidad]}$$

Es un observable y diagonalizable (autovalores reales) ➡ $\rho = \sum_i p_i \, |i\rangle\langle i|$

Propiedad 2:

$$\operatorname{tr} \rho = 1, \qquad \text{[normalizacion]}$$

Como la traza es independiente de la base ➡ $\sum_i p_i = 1$

Propiedad 3:

$$\rho \geq 0. \qquad \text{[positividad]}$$

ρ es semidefinido positivo y esto implica ➡ $\langle\psi|\rho|\psi\rangle \geq 0, \quad \forall \; |\psi\rangle \in \mathcal{H}$

Para una matriz diagonalizable esto es equivalente a pedir $p_i \geq 0$.

➡ Los autovalores de ρ son probabilidades.

Moraleja: $\boxed{\rho = \sum_i p_i \, |i\rangle\langle i| \,, \qquad \sum_i p_i = 1, \qquad p_i \geq 0}$

Ahora bien… si ρ es tan general, deberíamos poder reproducir todo lo que sabemos del caso de un estado que no represente una mezcla estadística. Consideremos el **estado puro** |ψ>:

$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ y el observable $\mathrm{A} = \sum_i a_i \, |a_i\rangle\langle a_i|$

El valor medio es:

$$\langle A \rangle = \mathrm{tr}\,[\rho A] = \sum_i \langle a_i|\rho A|a_i\rangle = \sum_i a_i \langle a_i|\rho|a_i\rangle$$

$$= \sum_i a_i \langle a_i|(|\psi\rangle\langle\psi|)|a_i\rangle = \sum_i a_i \langle a_i|\psi\rangle \langle\psi|a_i\rangle$$

$$= \sum_i a_i \langle\psi|a_i\rangle \langle a_i|\psi\rangle = \langle\psi| \left(\sum_i a_i \, |a_i\rangle\langle a_i| \right) |\psi\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$$

La probabilidad de medir a_i es:

$$P\left(a_i|\rho = |\psi\rangle\langle\psi|\right) = \mathrm{tr}\left[|\psi\rangle\langle\psi| \, |a_i\rangle\langle a_i|\right] = \sum_j \langle a_j|\psi\rangle \langle\psi|a_i\rangle \underbrace{\langle a_i|a_j\rangle}_{\delta_{ij}}$$

$$= \langle a_i|\psi\rangle \langle\psi|a_i\rangle = |\langle a_i|\psi\rangle|^2$$

Matriz densidad, ejemplos.

Problema 1: Construir la matriz densidad de:

(a) Un haz completamente polarizado con S_z+ (autoestado de S_z con +h/2)

$$\rho = |+\rangle\langle+| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ (se puede escribir como un único ket)

Además nos piden calcular:

$$\langle S_x \rangle = \mathrm{tr}(S_x \rho)$$
$$\langle S_y \rangle = \mathrm{tr}(S_y \rho)$$
$$\langle S_z \rangle = \mathrm{tr}(S_z \rho)$$

Ayuda memoria:

$$\mathrm{S}_x = \hbar/2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hbar/2 \Big(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+| \Big)$$

$$\mathrm{S}_z = \hbar/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \hbar/2 \Big(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-| \Big)$$

$$\langle S_x \rangle = \mathrm{tr}(S_x \rho) = \frac{\hbar}{2}\,\mathrm{tr}\Big((|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|)\,|+\rangle\langle+| \Big) = 0$$

$$\langle S_z \rangle = \mathrm{tr}(S_z \rho) = \frac{\hbar}{2}\,\mathrm{tr}\Big((|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|)\,|+\rangle\langle+| \Big) = \frac{\hbar}{2}$$

(b) Un haz completamente polarizado con S_x+ (autoestado de S_x con +h/2)

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle +| + \langle -|)$$ (se puede escribir como un único ket)

$$= \frac{1}{2}(|+\rangle\langle +| + |+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\langle S_x \rangle = \mathrm{tr}(S_x \rho) = \frac{\hbar}{2}\,\mathrm{tr}\Big((|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|)\rho\Big) = \frac{\hbar}{2}$$

$$\langle S_z \rangle = \mathrm{tr}(S_z \rho) = \frac{\hbar}{2}\,\mathrm{tr}\Big((|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|)\rho\Big) = 0$$

(c) Un haz parcialmente polarizado, formado por una mezcla estadística incoherente con 75% de probabilidad de tener el estado |+> y con 25% de probabilidad de tener el estado |->.

$$\rho = \frac{3}{4}|+\rangle\langle +| + \frac{1}{4}|-\rangle\langle -| = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$ (no se puede escribir como un único ket)

$$\langle S_x \rangle = \mathrm{tr}(S_x \rho) = \frac{\hbar}{2}\,\mathrm{tr}\Big((|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|)\rho\Big) = 0$$

$$\langle S_z \rangle = \mathrm{tr}(S_z \rho) = \frac{\hbar}{2}\,\mathrm{tr}\Big((|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|)\rho\Big) = \frac{\hbar}{4}$$

P3 Se fabrican dos haces parcialmente polarizados de partículas de spin 1, según las siguientes proporciones:

(a) 50% del autoestado $+\hbar$ en la dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$, 50% del autoestado $-\hbar$ en la dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$.

(b) 50% del autoestado $+\hbar$ en la dirección $\hat{\boldsymbol{x}}$, 50% del autoestado $-\hbar$ en la dirección $\hat{\boldsymbol{x}}$.

Muestre que ambos dan el mismo $\langle \boldsymbol{S} \rangle$, pero que las matrices densidad son distintas. Discuta cómo podría distinguirlos en un experimento.

Usemos la base de autoestados de S_z de spin 1: $\{ |1, 1_z\rangle, |1, 0_z\rangle, |1, -1_z\rangle \}$

En esta base, el operador S_x se escribe:

$$\mathrm{S}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} |1, -1_x\rangle = \frac{1}{2}(|1, 1_z\rangle - \sqrt{2}|1, 0_z\rangle + |1, -1_z\rangle) \\ |1, 0_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 1_z\rangle - |1, -1_z\rangle) \\ |1, 1_x\rangle = \frac{1}{2}(|1, 1_z\rangle + \sqrt{2}|1, 0_z\rangle + |1, -1_z\rangle) \end{array}$$

El caso (a) es: $\rho_1 = \frac{1}{2}\Big(|1, 1_z\rangle \langle 1, 1_z| + |1, -1_z\rangle \langle 1, -1_z| \Big) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

El caso (b) es: $\rho_2 = \frac{1}{2}\Big(|1, 1_x\rangle \langle 1, 1_x| + |1, -1_x\rangle \langle 1, -1_x| \Big) = [...] = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ej: Demostrar que $\langle \vec{S} \rangle = \mathrm{tr}\Big(\vec{S} \rho_i \Big) \quad \forall i \, \{ 1, 2 \}$