Física Teórica 2

Guía 2: Formalismo. Dimensión finita

Mateo Koifman

6 de abril de 2021

Índice

Repaso y expresiones útiles

Expresión de un operador	$\hat{X} = \sum_{jk} \|v_j\rangle X_{jk} \langle v_k\|$
Traza de un operador	$\mathrm{Tr}(\hat{X}) = \sum_j \langle v_j\| \hat{X} \|v_j\rangle$
Identidad	$\hat{\mathbb{1}} = \sum_j \|v_j\rangle \langle v_j\|$
Cambio de base	$\|v_l\rangle = \sum_j \langle v_j' \| v_l\rangle \|v_j'\rangle = \sum_j U_{jl} \|v_j'\rangle$
Elementos de matriz al cambiar de base	$X_{jk}' = \sum_{lm} U_{jl} X_{lm} U_{km}^*$

Problema 4

$\boxed{\textbf{P4}}$ Sean X, Y, Z tres operadores y $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ dos vectores de norma uno cualesquiera. Usando el álgebra de bras y kets, verifique las siguientes afirmaciones.

(a) $\mathrm{tr}(X+Y) = \mathrm{tr}(X) + \mathrm{tr}(Y)$.

(b) $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$.

(c) La traza de un operador no depende de la base en la que se calcula.

(d) $\mathrm{tr}(|\alpha\rangle\langle\beta|\, X) = \langle\beta|X|\alpha\rangle$. Concluya entonces que, en particular, $\mathrm{tr}(|\alpha\rangle\langle\beta|) = \langle\beta|\alpha\rangle$.

(e) $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$.

Problema 4(c)

(c) La traza de un operador no depende de la base en la que se calcula.

$\mathrm{Tr}(\hat{X}) = \sum_j \langle v_j | \hat{X} | v_j \rangle$

Inserto dos identidades

$\mathrm{Tr}(\hat{X}) = \sum_{jkl} \langle v_j | v'_k \rangle \langle v'_k | \hat{X} | v'_l \rangle \langle v'_l | v_j \rangle$

$\mathrm{Tr}(\hat{X}) = \sum_{jkl} \langle v'_k | \hat{X} | v'_l \rangle \langle v'_l | v_j \rangle \langle v_j | v'_k \rangle$

Reconociendo $\hat{\mathbb{1}} = \sum_j | v_j \rangle \langle v_j |$,

$\mathrm{Tr}(\hat{X}) = \sum_{kl} \langle v'_k | \hat{X} | v'_l \rangle \langle v'_l | v'_k \rangle$

$\mathrm{Tr}(\hat{X}) = \sum_{kl} \langle v'_k | \hat{X} | v'_l \rangle \delta_{lk}$

$\mathrm{Tr}(\hat{X}) = \sum_l \langle v'_l | \hat{X} | v'_l \rangle = \sum_j \langle v_j | \hat{X} | v_j \rangle$

Problema 4(d)

(d) $\mathrm{tr}(|\alpha\rangle\langle\beta|\hat{X}) = \langle\beta|\hat{X}|\alpha\rangle$. Concluya entonces que, en particular, $\mathrm{tr}(|\alpha\rangle\langle\beta|) = \langle\beta|\alpha\rangle$

$\mathrm{tr}(|\alpha\rangle\langle\beta|\hat{X}) = \sum_j \langle v_j|\alpha\rangle\langle\beta|\hat{X}|v_j\rangle$

$\mathrm{tr}(|\alpha\rangle\langle\beta|\hat{X}) = \sum_j \langle\beta|\hat{X}|v_j\rangle\langle v_j|\alpha\rangle$

Reconociendo $\hat{\mathbb{1}} = \sum_j |v_j\rangle\langle v_j|$,

$\mathrm{tr}(|\alpha\rangle\langle\beta|\hat{X}) = \langle\beta|\hat{X}|\alpha\rangle$

En particular, si $\hat{X} = \hat{\mathbb{1}}$

$\mathrm{tr}(|\alpha\rangle\langle\beta|) = \langle\beta|\alpha\rangle$

Problema 4(e)

Verificar $\left(\hat{X}\hat{Y}\right)^\dagger = \hat{Y}^\dagger\hat{X}^\dagger$

$$\left(\hat{X}\hat{Y}\right)^\dagger = \left(\sum_{ijkl} |v_i\rangle\, X_{ij}\, \langle v_j|v_k\rangle\, Y_{kl}\, \langle v_l|\right)^\dagger$$

Al tomar el conjugado transpuesto de una expresión (o *dagar*),

- $\lambda \to \lambda^*$
- $\langle\alpha| \to |\alpha\rangle$; $|\alpha\rangle \to \langle\alpha|$
- $\hat{X} \to \hat{X}^\dagger$
- Invierto el orden de toda la expresión

$$\left(\hat{X}\hat{Y}\right)^\dagger = \sum_{ijkl} |v_l\rangle\, Y_{kl}^*\, \langle v_k|v_j\rangle\, X_{ij}^*\, \langle v_i|$$

$$\left(\hat{X}\hat{Y}\right)^\dagger = \sum_{ijkl} |v_l\rangle\, Y_{lk}^\dagger\, \langle v_k|v_j\rangle\, X_{ji}^\dagger\, \langle v_i|$$

$$\left(\hat{X}\hat{Y}\right)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$$

Problema 8

P8 Dos operadores hermíticos A_1 y A_2, no conmutan ($[A_1, A_2] \neq 0$), pero se sabe que ambos conmutan con un tercer operador hermítico B, i.e. $[A_1, B] = [A_2, B] = 0$. Muestre entonces que el espectro de B debe estar degenerado.

Problema 8 (repaso de la teórica)

Sea $B = \left\{ v_{j,\mu_j} \right\}$ una base de autoestados $\hat{B}$.

Si $\left[\hat{B}, \hat{A}_1\right] = 0$, $\hat{A}_1$ deja invariantes los subespacios asociados a los autoval. b_j

$\hat{B}\hat{A}_1 \left| v_{j,\mu_j} \right\rangle = \hat{A}_1 \hat{B} \left| v_{j,\mu_j} \right\rangle = b_j \hat{A}_1 \left| v_{j,\mu_j} \right\rangle$

Entonces, si $\left[\hat{B}, \hat{A}_1\right] = 0$ se puede escribir

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} b_1 \mathbb{1}_{g_1 \times g_1} & 0 & \\ 0 & b_2 \mathbb{1}_{g_2 \times g_2} & \\ & & \dots \end{bmatrix} \qquad \hat{A}_1 = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} & 0 & \\ 0 & A_1^{(2)} & \\ & & \dots \end{bmatrix}$$

Análogamente, si $\left[\hat{B}, \hat{A}_2\right] = 0$ se puede escribir

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} b_1 \mathbb{1}_{g_1 \times g_1} & 0 & \\ 0 & b_2 \mathbb{1}_{g_2 \times g_2} & \\ & & \dots \end{bmatrix} \qquad \hat{A}_2 = \begin{bmatrix} A_2^{(1)} & 0 & \\ 0 & A_2^{(2)} & \\ & & \dots \end{bmatrix}$$

Tenemos expresado $\hat{B}$ como una matriz diagonal y $\hat{A}_1, \hat{A}_2$ en bloques de dimensión $g_j \times g_j$, donde g_j es la degeneración del autavalor b_j.

Problema 8

Resumiendo, si $\left[\hat{B}, \hat{A}_1\right] = \left[\hat{B}, \hat{A}_2\right] = 0$, tenemos que en la base de autovalores de $\hat{B}$

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} & 0 & \\ 0 & A_1^{(2)} & \\ & & \dots \end{bmatrix} \qquad \hat{A}_2 = \begin{bmatrix} A_2^{(1)} & 0 & \\ 0 & A_2^{(2)} & \\ & & \dots \end{bmatrix}$$

con $A_{1,2}^{(j)}$ bloques de dimensión $g_j \times g_j$

$$\left[\hat{A}_1, \hat{A}_2\right] = \begin{bmatrix} \left[A_1^{(1)}, A_2^{(1)}\right] & 0 & \\ 0 & \left[A_1^{(2)}, A_2^{(2)}\right] & \\ & & \dots \end{bmatrix}$$

Si cada $g_j = 1$ (*i.e.* no hay degeneración) $\Rightarrow \left[\hat{A}_1, \hat{A}_2\right] = 0$

Si $\left[\hat{A}_1, \hat{A}_2\right] \neq 0 \Rightarrow$ existe al menos un $g_j > 1$. (*i.e.* $\hat{B}$ tiene al menos un autovalor degenerado)