Física Teórica 2

Guía 3: Postulados de la mecánica cuántica. Conjuntos completos de observables que conmutan (CCOC)

Mateo Koifman

15 de abril de 2021

Índice

Conjuntos completos de observables que conmutan (CCOC)

Conjuntos completos de observables que conmutan (CCOC): Un conjunto de observables (es decir, operadores hermíticos)[1] $A, B, C...$ es un CCOC si

1. Todos los pares de operadores conmutan
2. Si especificamos los autovalores de todos los operadores del CCOC, siempre identificamos un único autoestado con tales autovalores

[1] Postulado 2

Ejemplos

Tomemos bases $B_{\mathbb{R}^2} = \{|1\rangle, |2\rangle\}$ o $B_{\mathbb{R}^3} = \{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ (según corresponda).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. $[A, B] = 0$, $[A, C] = 0$, pero $[B, C] \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. $[A, B] = 0$
2. $|a = 1, b = 2\rangle \leftrightarrow |1\rangle$, pero $|a = 3, b = 1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ y $|3\rangle$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

1. $[A, B] = 0$
2. $|a = 1, b = 2\rangle \leftrightarrow |1\rangle$, $|a = 3, b = 2\rangle \leftrightarrow |2\rangle$, $|a = 3, b = 7\rangle \leftrightarrow |3\rangle$

Otro ejemplo: el átomo de Hidrógeno

Para el átomo de Hidrógeno $\left\{\hat{H}, \hat{L}^2, \hat{L}_z\right\}$ es un CCOC

Es posible entonces construir una base del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ a partir de los autoestados $|n, l, m\rangle$ de estos observables. Cada estado de la base (u *orbital*) se corresponde con un único conjunto de autovalores $E = \frac{E_0}{n^2}, L^2 = l(l+1)\hbar^2, L_z = m\hbar$

Problema 4

P6 Considere un sistema de dimensión 3 y sea $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ una base ortonormal. Considere los observables A, B y C dados por

$$
\begin{aligned}
A &= a\left(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|\right) - a\,|3\rangle\langle 3| \ , \\
B &= b\left(|1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3|\right) - b\,|2\rangle\langle 2| \ , \\
C &= c\left(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|\right) + 2c\,|3\rangle\langle 3| \ ,
\end{aligned}
$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Verifique que estos tres operadores conmutan entre sí y poseen una base común de autoestados.

(b) Suponga que se miden los observables A y B sobre el sistema y se obtienen como resultados a y b. ¿Puede decir con certeza cuál es el estado luego de la medición? En caso afirmativo escriba el estado.

(c) Suponga ahora que en cambio se miden los observables A y C sobre el sistema, obteniendo los resultados a y c. ¿Puede ahora decir con certeza cuál es el estado luego de la medición? En caso afirmativo escriba el estado.

(d) Diga qué combinaciones de los operadores A, B y C forman un conjunto completo de observables que conmutan (CCOC).

Problema 4(a)

$$A = a(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) - a|3\rangle\langle 3|$$
$$B = b(|1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3|) - b|2\rangle\langle 2|$$
$$C = c(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) + 2c|3\rangle\langle 3|$$

(a) Verifique que estos tres operadores conmutan entre sí y poseen una base común de autoestados

Los operadores son diagonales, por lo tanto se puede verificar rápidamente

$$[A, B] = [A, C] = [B, C] = 0$$

Como ya vienen diagonalizados, podemos ver que una base de autoestados es $B = \{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. Además, estos son autoestados de A, B y C simultáneamente.

$$A = a(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) - a\,|3\rangle\langle 3|$$
$$B = b(|1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3|) - b\,|2\rangle\langle 2|$$
$$C = c(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) + 2c\,|3\rangle\langle 3|$$

(b) Suponga que se miden los observables A y B sobre el sistema y se obtienen como resultados a y b. ¿Puede decir con certeza cuál es el estado luego de la medición? En caso afirmativo escriba el estado.

Al medir A y obtener a, el estado se proyecta sobre el subespacio generado por $\{|1\rangle, |2\rangle\}$[2].
Análogamente, al medir B y obtener b, el estado se proyecta sobre el subespacio generado por $\{|1\rangle, |3\rangle\}$.

Como la intersección de ambos subespacios es el subespacio generado por $\{|1\rangle\}$, puedo estar seguro que el estado luego de la medición va a ser $|1\rangle$.

[2] Postulado 4, en el caso de un operador degenerado

Problema 4(c)

$$A = a(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) - a\,|3\rangle\langle 3|$$
$$B = b(|1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3|) - b\,|2\rangle\langle 2|$$
$$C = c(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) + 2c\,|3\rangle\langle 3|$$

(c) Suponga ahora que en cambio se miden los observables A y C sobre el sistema, obteniendo los resultados a y c. ¿Puede ahora decir con certeza cuál es el estado luego de la medición? En caso afirmativo escriba el estado.

Siguiendo el mismo razonamiento anterior, al medir A y obtener a, el estado se proyecta sobre el subespacio generado por $\{|1\rangle, |2\rangle\}$[3].
Al medir C y obtener c, el estado se proyecta sobre el mismo subespacio generado por $\{|1\rangle, |2\rangle\}$.

Ahora la intersección de ambos subespacios es el subespacio generado por $\{|1\rangle, |2\rangle\}$. Por lo tanto sólo puedo decir que el estado se encontrará dentro de este subespacio.

[3] Postulado 4, en el caso de un operador degenerado

$$A = a(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) - a|3\rangle\langle 3|$$
$$B = b(|1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3|) - b|2\rangle\langle 2|$$
$$C = c(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) + 2c|3\rangle\langle 3|$$

(d) Diga qué combinaciones de los operadores A, B y C forman un conjunto completo de observables que conmutan (CCOC)

- $\{A, B\}$ **es** un CCOC: $[A, B] = 0$. Todos los autoestados están identificados unívocamente por los autovalores de A y B: $|1\rangle \leftrightarrow |a, b\rangle$, $|2\rangle \leftrightarrow |a, -b\rangle$, $|3\rangle \leftrightarrow |-a, b\rangle$
- $\{A, C\}$ **no es** un CCOC: $[A, C] = 0$, pero $|1\rangle$ y $|2\rangle$ tienen el mismo par de autovalores a, c.
- $\{B, C\}$ **es** un CCOC: $[B, C] = 0$. Todos los autoestados están identificados unívocamente por los autovalores de A y B: $|1\rangle \leftrightarrow |b, c\rangle$, $|2\rangle \leftrightarrow |-b, c\rangle$, $|3\rangle \leftrightarrow |b, 2c\rangle$
- $\{A, B, C\}$ **es** un CCOC[4]: $[A, B] = [A, C] = [B, C] = 0$. Todos los autoestados están identificados unívocamente por los autovalores de A, B y C: $|1\rangle \leftrightarrow |a, b, c\rangle$, $|2\rangle \leftrightarrow |a, -b, c\rangle$, $|3\rangle \leftrightarrow |-a, b, 2c\rangle$

[4] en realidad, $\{A, B\}$ o $\{B, C\}$ ya eran CCOCs

Para pensar

$$
\begin{aligned}
A &= a(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) - a|3\rangle\langle 3| \\
B &= b(|1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3|) - b|2\rangle\langle 2| \\
C &= c(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) + 2c|3\rangle\langle 3|
\end{aligned}
$$

- Puedo agregar algún observable (distinto de B) al conjunto $\{A, C\}$ de forma tal que el nuevo conjunto sea un CCOC?
- Puedo agregar algún observable B' **no diagonal** de forma tal que $\{A, B'\}$ sea un CCOC?
- Existe algún observable que de por si solo sea un CCOC?