Física Teórica 2

Primer Cuatrimestre 2021

Guía 2: Formalismo

I. Espacios de dimensión finita

P1 Suponga que $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ es una base ortonormal de un espacio de Hilbert de dimensión 3.

(a) Considere $|\alpha\rangle = \frac{|1\rangle - i|2\rangle}{\sqrt{2}}$ y $|\beta\rangle = \frac{i|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}}$. ¿Cuánto vale $\langle\alpha|\beta\rangle$? ¿Son ortogonales?

(b) Escriba la representación matricial en la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ de los kets $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$; de los bra $\langle\alpha|$ y $\langle\beta|$; y de los operadores $|\alpha\rangle\langle\alpha|$, $|\beta\rangle\langle\beta|$, $|\alpha\rangle\langle\beta|$ y $|\beta\rangle\langle\alpha|$.

(c) Considere los tres estados $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$ dados por

$$|a\rangle = \frac{1}{2}\left(|1\rangle + \sqrt{2}\,|2\rangle + |3\rangle\right), \quad |b\rangle = \frac{1}{2}\left(|1\rangle - \sqrt{2}\,|2\rangle + |3\rangle\right), \quad |c\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |3\rangle\right).$$

Muestre que $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$ forman una base ortonormal y luego escriba $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ en esta base.

(d) Repita las partes que involucran $|\beta\rangle$ en los ítems anteriores si ahora $|\beta\rangle = \frac{|1\rangle + i|2\rangle}{\sqrt{2}}$

P2 **Operador de Proyección.** Dado un vector $|\alpha\rangle$ de un espacio de Hilbert de dimensión D, definimos el operador $P_\alpha = |\alpha\rangle\langle\alpha|$.

(a) Mostrar que P_α es una *proyección ortogonal*, es decir que satisface: (i) $P_\alpha^2 = P_\alpha$, (ii) $P_\alpha^\dagger = P_\alpha$.

(b) Sea $\{|1\rangle, \ldots, |D\rangle\}$ una base ortonormal. Escribir la representación matricial de P_α en esta base.

(c) Repita el ítem anterior para el caso particular en que $|\alpha\rangle$ coincide con un elemento de la base, por ejemplo $|\alpha\rangle = |1\rangle$. Deduzca que los autovalores de un proyector ortogonal son todos ceros salvo en el caso del vector sobre el cual proyecta, cuyo autovalor es uno.

(d) Considere ahora un operador hermítico A y sean $\{a_i\}$ sus autovalores y $\{|a_i\rangle\}$ la respectiva base ortonormal de autoestados (por simplicidad asumimos que no hay degeneración). Para un j fijo, muestre que $P_j = \prod_{i\neq j} \frac{(A-a_i)}{(a_j-a_i)}$ es el proyector sobre el autoestado de autovalor a_j. Calcule los proyectores: $P_\pm$ para un sistema de spin1/2 con $A = \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$.

(e) Calcule nuevamente los autoestados de $A = \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$, usando los operadores de proyección $P_\pm$ del ítem anterior.

P3 Considere un espacio de Hilbert de dimensión 3 y sea $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ una base ortonormal. Para cada uno de los siguientes operadores

(i) $M_1 = 2\,|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + 2i\,|2\rangle\langle 3| - 2i\,|3\rangle\langle 2| + 4\,|3\rangle\langle 3|$,

(ii) $M_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, en la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$,

(iii) $M_3\,|1\rangle = |1\rangle - 2i\,|3\rangle$, $M_3\,|2\rangle = |2\rangle$, $M_3\,|3\rangle = 2i\,|1\rangle + |3\rangle$;

(a) determine si el operador es hermítico.

(b) escriba la descomposición del operador como combinación lineal de operadores $\{|i\rangle\langle j|\}_{i,j=1,2,3}$.

(c) obtenga la representación matricial del operador en la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$.

(d) escriba la acción del operador sobre cada elemento de la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$.

(e) obtenga la descomposición espectral del operador.

P4 Sean X, Y dos operadores y $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ dos vectores de norma uno cualesquiera. Usando el álgebra de bras y kets, verifique las siguientes afirmaciones.

(a) $\mathrm{tr}(X+Y) = \mathrm{tr}(X) + \mathrm{tr}(Y)$.
(b) $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$.
(c) La traza de un operador no depende de la base en la que se calcula.
(d) $\mathrm{tr}(|\alpha\rangle\langle\beta|\, X) = \langle\beta|X|\alpha\rangle$. Concluya entonces que, en particular:

- Con $X = \mathbb{I}$, $\boxed{\mathrm{tr}(|\alpha\rangle\langle\beta|) = \langle\beta|\alpha\rangle}$.
- *Valor medio:* $\langle X\rangle_{|\alpha\rangle} = \langle\alpha|\, X\, |\alpha\rangle = \mathrm{tr}(|\alpha\rangle\langle\alpha|\, X)$ entonces $\boxed{\langle X\rangle_{|\alpha\rangle} = tr(P_{|\alpha\rangle}X)}$.
- *Regla de Born:* $P(|\beta\rangle\,|\,|\alpha\rangle) = |\,\langle\beta|\alpha\rangle\,|^2 = \langle\alpha|\beta\rangle\,\langle\beta|\alpha\rangle$ entonces $\boxed{P(|\beta\rangle\,|\,|\alpha\rangle) = tr(P_{|\beta\rangle}P_{|\alpha\rangle})}$.

(e) $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$.

P5 Sea A un operador hermítico cuya descomposición espectral, $A = \sum_i a_i\,|i\rangle\langle i|$, es conocida y sea g una función tal que admite un desarrollo en series de potencias. Muestre entonces que $g(A) = \sum_i g(a_i)\,|i\rangle\langle i|$.

P6 Sean A y B dos operadores hermíticos tales que admiten una base completa ortonormal de autovectores simultáneos de A y B, $\{|a_i, b_i\rangle\}$. ¿Se puede siempre concluir que $[A, B] = 0$? Si su respuesta es sí, pruébela. Si es no, dé un contraejemplo.

P7 Dos operadores hermíticos A_1 y A_2, no conmutan ($[A_1, A_2] \neq 0$), pero se sabe que ambos conmutan con un tercer operador hermítico B, i.e. $[A_1, B] = [A_2, B] = 0$. Muestre entonces que el espectro de B debe estar degenerado.

P8 Sea U un operador unitario, es decir tal que $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}$.

(a) Mostrar que los autovalores de U tienen módulo 1.
(b) Mostrar que U siempre se puede escribir como $U = e^{iM}$, donde M es un operador hermítico.
(c) Usando la expresión para U del ítem anterior, mostrar entonces que $U^{-1} = U^\dagger = e^{-iM}$.

P9 Sean A, B y C operadores. Pruebe las siguientes identidades.

(a) $AB = BA + [A, B]$
(b) $[A, B] = -\,[B, A]$
(c) $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$
(d) $[A, BC] = [A, B]\, C + B\, [A, C]$
(e) $[AB, C] = A\, [B, C] + [A, C]\, B$

P10 Sean A y B dos operadores tales que A conmuta con $[A, B]$. Demostrar que

$$[A^m, B] = mA^{m-1}\, [A, B]\,.$$

Use esta propiedad para demostrar que

$$[f(A), B] = \frac{\mathrm{d}f(A)}{\mathrm{d}A}\, [A, B]\,,$$

donde f es una función que admite un desarrollo en serie de potencias de su argumento.

P11 Dados dos operadores A y B, definimos la familia de operadores $C(s)$, parametrizados por un parámetro real $s \in \mathbb{R}$, de la siguiente forma

$$C(s) =: e^{sA} B e^{-sA}.$$

Demostrar entonces que: (i) $\frac{\mathrm{d}C(s)}{\mathrm{d}s} = [A, C(s)]$, (ii) $\frac{\mathrm{d}^2C(s)}{\mathrm{d}s^2} = [A, [A, C(s)]]$, (iii) $\frac{\mathrm{d}^3C(s)}{\mathrm{d}s^3} = [A, [A, [A, C(s)]]]$, (iv) y generalice para la n-ésima derivada de $C(s)$. Utilice esto para expandir $C(s)$ en una serie de Taylor alrededor de $s = 0$ y demostrar que

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \ldots$$

Finalmente, para el caso particular en que $[A, B] = cB$, con $c \in \mathbb{C}$, muestre que el resultado anterior implica que

$$e^A B e^{-A} = e^c\, B\,.$$

P12 Sean A y B dos operadores que conmutan con $[A, B]$. Demostrar que

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$$

Ayuda:

(a) Mostrar que $\left[e^{\eta A}, B\right] = \eta e^{\eta A}[A, B]$.

(b) Definimos $g(\eta) \equiv e^{\eta A} e^{\eta B}$. Demostrar que la derivada es: $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\eta} = (A + B + \eta\,[A, B])g$.

(c) Integrar la ecuación anterior, con la condición inicial: $g(0) = \mathbb{I}$

P13 (a) Considere un operador tal que $A^2 = \mathbb{I}$ (dé un ejemplo concreto de un operador de este tipo). Demuestre que para todo número complejo α y cualquier función f que pueda ser expresada en serie de potencias de su argumento vale que

$$f(\alpha A) = \frac{1}{2}(f(\alpha) + f(-\alpha))\mathbb{I} + \frac{1}{2}(f(\alpha) - f(-\alpha))A$$

En particular muestre que: $e^{-i\alpha A} = \cos(\alpha)\mathbb{I} - i\sin(\alpha)A$.

(b) Considere un operador B tal que $B^3 = B$ (¿podría dar un ejemplo?). Demuestre que para todo número complejo α y cualquier función f que pueda ser expresada en serie de potencias de su argumento vale que

$$f(\alpha B) = f(0)\mathbb{I} + \left(\frac{1}{2}(f(\alpha) + f(-\alpha)) - f(0)\right)B^2 + \frac{1}{2}\left(f(\alpha) - f(-\alpha)\right)B$$

En particular muestre que: $e^{-i\alpha B} = \mathbb{I} + (\cos(\alpha) - 1)B^2 - i\sin(\alpha)B$.

II. Espacios de dimensión infinita

P14 (a) Sean A y B dos operadores. Utilizando la linealidad y la ciclicidad de la traza, calcule $\operatorname{tr}([A, B])$.

(b) Utilizando la relación de conmutación canónica $[x, p] = i\hbar\mathbb{I}$, calcule $\operatorname{tr}([x, p])$. Compare con lo obtenido en el ítem anterior. ¿Son consistentes ambos resultados? ¿Cuál es el problema?

(c) ¿Pueden existir dos operadores A y B sobre un espacio de dimensión finita tales que $[A, B] = i\hbar\mathbb{I}$? ¿Por qué?

P15 Dadas funciones F y G que se pueden expandir en serie de potencias de sus argumentos, verifique que

$$[x, G(p)] = i\hbar\frac{\partial G}{\partial p}, \qquad [p, F(x)] = -i\hbar\frac{\partial F}{\partial x}.$$

partiendo de las relaciones de conmutación canónica $[x, p] = i\hbar$.

En particular, utilize esto para evaluar $[x, \mathcal{T}(d)]$, donde $\mathcal{T}(d)$ es el operador unitario

$$\mathcal{T}(d) = \exp\left(\frac{-ipd}{\hbar}\right).$$

Utilizando esto (i) calcule $\mathcal{T}^{-1}(d)\,x\,\mathcal{T}(d)$; (ii) compare el valor de $\langle\psi|x|\psi\rangle$ con el de $\langle\psi'|x|\psi'\rangle$, donde $|\psi'\rangle := \mathcal{T}(d)\,|\psi\rangle$.

P16 Considere un sistema cuyo estado $|\psi\rangle$ es tal que

$$\langle x|\psi\rangle = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\, e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}\, e^{ix/r}, \tag{1}$$

con σ y r constantes reales con unidades de longitud.

(a) Calcule la representación del estado $|\psi\rangle$ en la base de momento, $\langle p|\psi\rangle$.

(b) Calcule $\langle\psi|p|\psi\rangle$, usando: (i) la representación en momento de $|\psi\rangle$; (ii) usando la representación en posición de $|\psi\rangle$ y la propiedad $\langle x|p|\psi\rangle = -i\hbar\frac{\partial\langle x|\psi\rangle}{\partial x}$.

(c) Sea $\mathcal{T}(d)$ el operador de traslación en una distancia d. Calcule entonces la representación en las bases de posición y de momento del estado $|\phi\rangle := \mathcal{T}(d)\,|\psi\rangle$.