Ejercicios Guía 3

Federico Bai

30/4/2021

1. Problema 1

1.1. Inciso a)

Los operadores A y B vienen dados por:

$$A = a|1\rangle\langle 1| - a(|2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3|)$$

$$B = b|1\rangle\langle 1| - ib|2\rangle\langle 3| + ib|3\rangle\langle 2|$$

Veamos los autovalores de:

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Un autovalor es b, queda diagonalizar una matriz 2x2, que da como resultado que los autovalores son $\pm b$, con lo cual vemos que b es un autovalor de multiplicidad 2, por lo tanto B tiene un espectro degenerado.
Para ver que A y B conmutan calculemos:

$$AB = ab|1\rangle\langle 1| + iab|2\rangle\langle 3| - iab|3\rangle\langle 2|$$

$$BA = ab|1\rangle\langle 1| + iab|2\rangle\langle 3| - iab|3\rangle\langle 2|$$

Por lo tanto:

$$[A, B] = 0$$

1.2. Inciso b)

Voy a plantear el procedimiento general para encontrar una base común de autovectores dados 2 observables A y B, ya que este procedimiento lo voy a volver a usar en el Problema 2.

1. Encontrar una base de autovectores de A, $\{|\mu_n^i\rangle; n = 1, 2, ...i = 1, 2, .., g_n\}$ donde g_n es el grado de degeneración del autovalor a_n
2. B en la base $\{|\mu_n^i\rangle\}$ es una matriz "diagonal por bloques", los elementos de estos bloques están dados por:

   $$\beta_{ij}^{(n)} = \langle \mu_n^i | B | \mu_n^j \rangle$$

   El paso 2 es escribir a B en la base de autovectores de A

3. Estos bloques no necesariamente van a ser diagonales, por lo tanto, hay que diagonalizarlos, obteniendo una nueva base $\{|v_n^i\rangle; i = 1, 2, .., g_n\}$ en donde B es representada por una matriz diagonal.

4. Esta nueva base $\{|v_n^i\rangle\}$ es base de autovectores de A y de B.

Una vez aclarado esto, vemos que en nuestro caso, B ya esta representada en la base de autovectores de A, con lo cual basta con diagonalizar B y estos autovectroes serán, a su vez, autovectores de A
Los autovectores de B son:

$$|\varepsilon_b^1\rangle = |1\rangle \qquad |\varepsilon_b^2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i|2\rangle + |3\rangle) \qquad |\varepsilon_{-b}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(i|2\rangle + |3\rangle)$$

Por lo tanto, la base $\{|\varepsilon_b^1\rangle, |\varepsilon_b^2\rangle, |\varepsilon_{-b}\rangle\}$ es base de autovectores de A y de B.

1.3. Inciso c)

$\{A\}$ y $\{B\}$ no forman un CCOC ya que, como el espectro esta degenerado, para cada autovalor no corresponde un único autovector.
Veamos $\{A, B\}$, notemos que:

$$A|\varepsilon_b^1\rangle = a|\varepsilon_b^1\rangle \qquad A|\varepsilon_b^2\rangle = -a|\varepsilon_b^2\rangle \qquad A|\varepsilon_{-b}\rangle = -a|\varepsilon_{-b}\rangle$$

Entonces: si

$$|b, a\rangle \longleftrightarrow |\varepsilon_b^1\rangle \qquad |b, -a\rangle \longleftrightarrow |\varepsilon_b^2\rangle \qquad |-b, -a\rangle \longleftrightarrow |\varepsilon_{-b}\rangle$$

Por lo tanto, $\{A, B\}$ es un CCOC
Veamos ahora $\{A, B, AB\}$:

$$AB|\varepsilon_{-b}\rangle = ab|\varepsilon_{-b}\rangle \qquad AB|\varepsilon_b^1\rangle = ab|\varepsilon_b^1\rangle$$

Entonces no es un CCOC, puesto que $|-a, -b, ab\rangle \longleftrightarrow |\varepsilon_b^1\rangle$ y $|\varepsilon_{-b}\rangle$

1.4. Inciso d)

El estado del sistema es:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{2}(|2\rangle - i|3\rangle)$$

Escribamos los proyectores de A

$$\Pi_a = |1\rangle\langle 1| \qquad \Pi_{-a} = |2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3|$$

Y los de B:

$$\Pi_{-b} = |\varepsilon_{-b}\rangle\langle\varepsilon_{-b}| \qquad \Pi_b = |\varepsilon_b^1\rangle\langle\varepsilon_b^1| + |\varepsilon_b^2\rangle\langle\varepsilon_b^2|$$

Aplicamos el postulado 3 de la mecánica cuántica, que dice que si el estado del sistema es $|\psi\rangle$ y medimos A, la probabilidad e obtener a_i es $P(a_i|\psi) = \langle\psi|\Pi_i|\psi\rangle$
El enunciado dice que se mide A y luego B, veamos la probabilidad de $\{a, b\}$

$$\langle\psi|\Pi_a|\psi\rangle = |\langle 1|\psi\rangle|^2 \Longrightarrow \langle 1|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow |\langle 1|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

Una vez que medi a, el estado $|\psi\rangle$ pasa a ser:

$$|\psi\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{P[a_i|\psi}}\Pi_i|\psi\rangle \quad (4to\ potulado)$$

Entonces:

$$|\psi'\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}|1\rangle = |1\rangle$$

Ahora mido B:

$$P(b|\psi') = \langle\psi'|\Pi_b|\psi'\rangle = |\langle 1|\psi'\rangle|^2 + |\langle\varepsilon_b^2|\psi'\rangle|^2 = 1$$

Por lo tanto la probabilidad de obtener $\{a, b\}$ es $p = \frac{1}{2} * 1 = \frac{1}{2}$
La probabilidad de medir $\{a, -b\}$ es:

$$P(-b|\psi') = |\langle\varepsilon_{-b}|\psi'\rangle|^2 = 0$$

Entonces la probabilidad de obtener $\{a, -b\}$ es nula.
Veamos ahora $\{-a, -b\}$:

$$P(-a|\psi) = |\langle 2|\psi\rangle|r + |\langle 3|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{2}(|2\rangle - i|3\rangle)$$

$$P(-b|\psi') = |\langle\varepsilon_{-b}|\psi'\rangle|^2 \Longrightarrow \langle\varepsilon_{-b}|\psi'\rangle = \frac{1}{2}(-i - i) = -i \Longrightarrow |\langle\varepsilon_{-b}|\psi'\rangle|^2 = 1$$

Por lo tanto la probabilidad de obtener $\{-a, -b\}$ es $P = \frac{1}{2}$
De manea analoga se puede pronar que la probabilidad de obtener $-a, b$ es $P = 0$ (aunque no es necesario hacer cuentas, ya que la probabilidad de obtener b luego de medir $-a$ es 1)

1.5. Inciso e)

Del inciso a) sabemos cuanto vale AB (calculado a la hora de ver el conmutador). Si realizamos

$$AB|\psi\rangle = \frac{ab}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{ab}{2}|2\rangle - \frac{iab}{2}|3\rangle = ab|\psi\rangle$$

Entonces $|\psi\rangle$ es autovector de AB con autovalor ab
Por lo que se vé que el autoestado $|\psi\rangle$ está asociado a ab, por eso cuando en el inciso d) queriamos medir $\{a, -b\}$ o $\{-a, b\}$ la probabilidad era nula, ya que eso corresponderia a que AB tomara el valor $-ab$, y, como vimos, si $|\psi\rangle$ es el estado del sistema, el valor que puede medirse de AB es ab.

2. Problema 2

Los operadores correspondientes son $N_1 = \sigma_x \otimes \sigma_z$ y $N_2 = \sigma_z \otimes \sigma_x$.
Veamos, en primer lugar, que conmutan:

$$\begin{aligned}[N_1, N_2] &= (\sigma_x \otimes \sigma_z)(\sigma_z \otimes \sigma_x) - (\sigma_z \otimes \sigma_x)(\sigma_x \otimes \sigma_z) \\ &= (\sigma_x\sigma_z \otimes \sigma_z\sigma_x) - (\sigma_z\sigma_x \otimes \sigma_x\sigma_z) = \sigma_y \otimes \sigma_y - \sigma_y \otimes \sigma_y = 0\end{aligned}$$

Donde se utilizó que $\sigma_z\sigma_x = i\sigma_y$, $\sigma_x\sigma_z = -i\sigma_y$
Consideremos la base producto $\{|00\rangle, |11\rangle, |01\rangle, |10\rangle\}$, vemaos la acción de los poeradores N_1 y N_2 sobre los elementos de la base, recordando que:

$$\begin{aligned} \sigma_x|0\rangle &= |1\rangle & \sigma_x|1\rangle &= |0\rangle \\ \sigma_z|0\rangle &= |0\rangle & \sigma_z|1\rangle &= -|1\rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} N_1|00\rangle &= |10\rangle & N_2|00\rangle &= |01\rangle \\ N_1|11\rangle &= -|01\rangle & N_2|11\rangle &= -|10\rangle \\ N_1|01\rangle &= -|11\rangle & N_2|01\rangle &= |00\rangle \\ N_1|10\rangle &= |00\rangle & N_2|10\rangle &= -|11\rangle \end{aligned}$$

Para encontrar una base común de autovectores de N_1 y N_2 realizo el procedimiento descrito en el inciso b) del Problema 1.
Comencemos viendo que una base posible de N_1 es:

$$\begin{aligned} |\mu_+^1\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) & |\mu_-^1\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle) \\ |\mu_+^2\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle - |01\rangle) & |\mu_-^2\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |01\rangle) \end{aligned}$$

Donde el subindice $\pm$ indica si el autovalor asociado a ese autovector es ± 1.
Ahora prosigamos con escribir N_2 en la base de autovalores de N_1:

$$\begin{aligned} \beta_{11}^+ &= \langle \mu_+^1|N_2|\mu_+^2\rangle = \frac{1}{2}(\langle 00| + \langle 10|)(|01\rangle - |11\rangle) = 0 \\ \beta_{12}^+ &= \langle \mu_+^1|N_2|\mu_+^2\rangle = -1 \\ \beta_{21}^+ &= \langle \mu_+^2|N_2|\mu_1^+\rangle = -1 \\ \beta_{22}^+ &= \langle \mu_+^2|N_2|\mu_+^2\rangle = 0 \end{aligned}$$

Con lo cual queda constituido el primer bloque, veamos el segundo:

$$\begin{aligned} \beta_{11}^- &= \langle \mu_-^1|N_2|\mu_-^1\rangle = 0 \\ \beta_{12}^- &= \langle \mu_-^1|N_2|\mu_-^2\rangle = 1 \\ \beta_{21}^- &= \langle \mu_-^2|N_2|\mu_-^1\rangle = 1 \\ \beta_{22}^- &= \langle \mu_-^2|N_2|\mu_-^2\rangle = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto si escribimos N_2 en la base de autovectores de N_1 nos queda:

$$N_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Que es diagonal por bloques, diagonalicemos estos bloques para obtener los autovectores de esta matriz N_2, realizando los cálculos nos queda que:

$$Autovalor = 1 \Longrightarrow Autovectores = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Autovalor = -1 \Longrightarrow Autovectores = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Recordemos una cosa, estos autovectores son las coordenadas de autovectores de N_2 en la base de autovectores de N_1. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} |v_+^1\rangle &\equiv -|\mu_+^1\rangle + |\mu_+^2\rangle \\ |v_+^2\rangle &\equiv |\mu_-^1\rangle + |\mu_-^2\rangle \\ |v_-^1\rangle &\equiv |\mu_+^1\rangle + |\mu_+^2\rangle \\ |v_-^2\rangle &\equiv -|\mu_-^1\rangle + |\mu_-^2\rangle \end{aligned}$$

Y estos vectores forman una base de autovectores de A y de B.
Por la notación se puede ver, que para cada par de autovalores de A y de B corresponde un único autovector, por lo tanto los operadores N_1 y N_2 forman un CCOC.
Si escribimos estos vectores en función de los estados de Bell, quedan de la forma:

$$\begin{aligned} |v_+^1\rangle &= -|\beta_{+1,-1}\rangle - |\beta_{-1,+1}\rangle \\ |v_+^2\rangle &= |\beta_{+1,+1}\rangle + |\beta_{-1,+1}\rangle \\ |v_-^1\rangle &= |\beta_{+1,+1}\rangle - |\beta_{-1,-1}\rangle \\ |v_{-1}^2\rangle &= -|\beta_{+1,-1}\rangle + |\beta_{-1,+1}\rangle \end{aligned}$$