Física Teórica 2 - Guía 4: Postulados - Matriz Densidad

Federico Petrovich

24 de mayo de 2021

Ejercicio 3

Tanto en el ítem a como en el b, la matriz densidad está dada por

$$\rho = \frac{1}{2}\left|1,\mathbf{n}\right\rangle\left\langle 1,\mathbf{n}\right| + \frac{1}{2}\left|-1,\mathbf{n}\right\rangle\left\langle -1,\mathbf{n}\right| = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} - \left|0,\mathbf{n}\right\rangle\left\langle 0,\mathbf{n}\right|\right), \tag{1}$$

donde $\mathbf{n} = \mathbf{z}$ en el ítem a y $\mathbf{n} = \mathbf{x}$ en el b. Luego,

$$\begin{aligned}\langle S_i\rangle = \operatorname{tr}\left(\rho S_i\right) = \tfrac{1}{2}\left[\operatorname{tr}\left(S_i\right) - \operatorname{tr}\left(\left|0,\mathbf{n}\right\rangle\left\langle 0,\mathbf{n}\right| S_i\right)\right] = -\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\left|0,\mathbf{n}\right\rangle\left\langle 0,\mathbf{n}\right| S_i\right) \\ = -\tfrac{1}{2}\sum_m \left\langle m,\mathbf{n}|0,\mathbf{n}\right\rangle\left\langle 0,\mathbf{n}\right| S_i \left|m,\mathbf{n}\right\rangle = -\tfrac{1}{2}\left\langle 0,\mathbf{n}\right| S_i \left|0,\mathbf{n}\right\rangle.\end{aligned} \tag{2}$$

Teniendo en cuenta que

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$S_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -\imath & 0 \\ \imath & 0 & -\imath \\ 0 & \imath & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$S_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

en la base de S_z, en el ítem a se ve que

$$\langle S_i\rangle = 0. \tag{6}$$

En el b, como z no es ninguna dirección privilegiada, debe dar lo mismo. En efecto,

$$\left|0,\mathbf{x}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|1\right\rangle - \left|-1\right\rangle\right) \tag{7}$$

y por lo tanto,

$$\left\langle 0,\mathbf{x}\right| S_i \left|0,\mathbf{x}\right\rangle = \frac{1}{2}\left(\left\langle 1\right| S_i \left|1\right\rangle - \left\langle 1\right| S_i \left|-1\right\rangle - \left\langle -1\right| S_i \left|1\right\rangle + \left\langle -1\right| S_i \left|-1\right\rangle\right) = 0,\ i = x,\ y,\ z. \tag{8}$$

Para distinguirlos, conviene medir el spin en alguna dirección $\mathbf{n}'$ y ver cual es la probabilidad de obtener $m\hbar$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}P\left(\left|m,\mathbf{n}'\right\rangle|\rho\right) = \left\langle\left|m,\mathbf{n}'\right\rangle\left\langle m,\mathbf{n}'\right|\right\rangle = \operatorname{tr}\left(\rho\left|m,\mathbf{n}'\right\rangle\left\langle m,\mathbf{n}'\right|\right) = \tfrac{1}{2}\left[\operatorname{tr}\left(\left|m,\mathbf{n}'\right\rangle\left\langle m,\mathbf{n}'\right|\right) - \operatorname{tr}\left(\left|0,\mathbf{n}\right\rangle\left\langle 0,\mathbf{n}|m,\mathbf{n}'\right\rangle\left\langle m,\mathbf{n}'\right|\right)\right] \\ = \tfrac{1}{2}\left(1 - \left\langle 0,\mathbf{n}|m,\mathbf{n}'\right\rangle\left\langle m,\mathbf{n}'|0,\mathbf{n}\right\rangle\right) = \tfrac{1}{2}\left(1 - \left|\left\langle 0,\mathbf{n}|m,\mathbf{n}'\right\rangle\right|^2\right).\end{aligned} \tag{9}$$

Eligiendo entonces $m = 0$ y $\mathbf{n}' = \mathbf{z}$, en el ítem a se tiene que la probabilidad es nula mientras que en el b la probabilidad es $\frac{1}{2}$. Luego, midiendo el spin en la dirección z se va a poder diferenciar a los estados, ya que en el del ítem a solo se medirá $\pm\hbar$ mientras que en el b también se medirá $0\hbar$.

Ejercicio 10

En el ítem a, la pureza está dada por

$$\begin{aligned}\gamma = \mathrm{tr}\left(\rho_{AB}^2\right) &= \mathrm{tr}\left(p^2 \left|\Psi^-\right\rangle \left\langle\Psi^-\right| + 2p\tfrac{1-p}{4} \left|\Psi^-\right\rangle \left\langle\Psi^-\right| + \tfrac{(1-p)^2}{16}\mathbb{I}_{AB}\right) \\ &= p^2 + 2p\tfrac{1-p}{4} + \tfrac{(1-p)^2}{16}4 = \tfrac{4p^2+2\left(p-p^2\right)+(1-p)^2}{4} = \tfrac{3p^2+1}{4}.\end{aligned} \tag{10}$$

Esta es una parabola con mínimo en $p=0$, $\gamma=\frac{1}{4}$, lo cual implica que el estado es completamente mixto ya que la dimensión del espacio es $d=4$, y máximo en $p=1$, $\gamma=1$, lo cual implica que el estado es puro.

En el ítem b, se tiene que

$$\rho_A = \mathrm{tr}_B\left(\rho_{12}\right) = p\mathrm{tr}_B\left(\left|\Psi^-\right\rangle\left\langle\Psi^-\right|\right) + \frac{1-p}{4}\mathrm{tr}_B\left(\mathbb{I}_{AB}\right) = p\mathrm{tr}_B\left(\left|\Psi^-\right\rangle\left\langle\Psi^-\right|\right) + \frac{1-p}{2}\mathbb{I}_A. \tag{11}$$

Sabiendo que

$$\left\langle\uparrow_B \middle| \Psi^-\right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\downarrow\right\rangle, \ \left\langle\downarrow_B \middle| \Psi^-\right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\uparrow\right\rangle \tag{12}$$

se obtiene

$$\rho_A = \frac{p}{2}\left(\left|\uparrow\right\rangle\left\langle\uparrow\right| + \left|\downarrow\right\rangle\left\langle\downarrow\right|\right) + \frac{1-p}{2}\mathbb{I}_A = \frac{p}{2}\mathbb{I}_A + \frac{1-p}{2}\mathbb{I}_A = \frac{1}{2}\mathbb{I}_A. \tag{13}$$

De la misma manera,

$$\rho_B = \frac{1}{2}\mathbb{I}_B. \tag{14}$$

Ninguna de las dos depende de p y para el caso en el que el estado global es puro, éste es máximamente entrelzado ya que las matrices densidades reducidas representan un estado completamente mixto.

Finalmente, para el ítem c, se tiene que

$$\begin{aligned}\left\langle\sigma_y\otimes\sigma_y\right\rangle_{AB} &= \mathrm{tr}\left(\rho_{AB}\sigma_y\otimes\sigma_y\right) = p\mathrm{tr}\left(\left|\Psi^-\right\rangle\left\langle\Psi^-\right|\sigma_y\otimes\sigma_y\right) + \tfrac{1-p}{4}\mathrm{tr}\left(\sigma_y\otimes\sigma_y\right) = p\left\langle\Psi^-\right|\sigma_y\otimes\sigma_y\left|\Psi_-\right\rangle + \tfrac{1-p}{4}\mathrm{tr}\left(\sigma_y\right)^2 \\ &= p\left\langle\Psi^-\right|\sigma_y\otimes\sigma_y\left|\Psi_-\right\rangle = \tfrac{1}{2}p\left[\left\langle\uparrow\downarrow\right|\sigma_y\otimes\sigma_y\left|\uparrow\downarrow\right\rangle - \left\langle\uparrow\downarrow\right|\sigma_y\otimes\sigma_y\left|\downarrow\uparrow\right\rangle - \left\langle\downarrow\uparrow\right|\sigma_y\otimes\sigma_y\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + \left\langle\downarrow\uparrow\right|\sigma_y\otimes\sigma_y\left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right] = \\ &= p\left[\left\langle\uparrow\right|\sigma_y\left|\uparrow\right\rangle\left\langle\downarrow\right|\sigma_y\left|\downarrow\right\rangle - \left\langle\uparrow\right|\sigma_y\left|\downarrow\right\rangle\left\langle\downarrow\right|\sigma_y\left|\uparrow\right\rangle\right] = -p\left|\left\langle\downarrow\right|\sigma_y\left|\uparrow\right\rangle\right|^2 = -p\end{aligned} \tag{15}$$

y

$$\left\langle\sigma_y\right\rangle_A\left\langle\sigma_y\right\rangle_B = \mathrm{tr}\left(\rho_A\sigma_y\right)\mathrm{tr}\left(\rho_B\sigma_y\right) = 0. \tag{16}$$

Por lo tanto,

$$K\left(y,y\right) = \left\langle\sigma_y\otimes\sigma_y\right\rangle_{AB} - \left\langle\sigma_y\right\rangle_A\left\langle\sigma_y\right\rangle_B = -p. \tag{17}$$

Esto nos dice que los spines en la dirección y de ambos sistemas están correlacionados, ya que $K\left(y,y\right)\neq 0$ (salvo para $p=0$).