Diego Wallace

FECHA

Entrega guía 5

P1) Base ortonormal $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$

$$H = \begin{pmatrix} \hbar\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\hbar\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\hbar\omega_0 \end{pmatrix} \qquad A = a|u_1\rangle\langle u_1| + a|u_2\rangle\langle u_3| + a|u_3\rangle\langle u_2| \qquad \begin{cases} B|u_1\rangle = b|u_1\rangle \\ B|u_2\rangle = b|u_3\rangle \\ B|u_3\rangle = b|u_3\rangle \end{cases}$$

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$

(a) Se pueden medir solo los valores de energía: los autovalores del Hamiltoniano $\hbar\omega_0$ y $2\hbar\omega_0$

$P(\hbar\omega_0 | |\psi(0)\rangle) = |\langle u_1|\psi(0)\rangle|^2 = |\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$

$P(2\hbar\omega_0||\psi(0)\rangle) = \langle\psi(0)|\Pi_{2\hbar\omega_0}|\psi(0)\rangle = \langle\psi(0)|u_2\rangle\langle u_2|\psi(0)\rangle + \langle\psi(0)|u_3\rangle\langle u_3|\psi(0)\rangle$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(2\hbar\omega_0||\psi(0)\rangle) = \frac{1}{2}$$

$\langle H\rangle_{|\psi(0)\rangle} = \langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} \hbar\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\hbar\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\hbar\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = (\frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}}, \hbar\omega_0, \hbar\omega_0) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$\langle H\rangle_{|\psi(0)\rangle} = \frac{3}{2}\hbar\omega_0$

$Var(H) = \langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2 \Rightarrow H^2 = \begin{pmatrix} \hbar^2\omega_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4\hbar^2\omega_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4\hbar^2\omega_0^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle H^2\rangle = \frac{5}{2}\hbar^2\omega_0^2$

$Var(H) = \frac{5}{2}\hbar^2\omega_0^2 - \frac{9}{4}\hbar^2\omega_0^2 = \frac{\hbar^2\omega_0^2}{4}$

(b) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |u_1\rangle$ autoestado de autovalor a

$\begin{vmatrix} -\lambda & a \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a^2 = 0 \Rightarrow \pm a$ autovalores $\frac{|u_2\rangle + |u_3\rangle}{\sqrt{2}}$ autoestado del autovalor a

$\frac{|u_2\rangle - |u_3\rangle}{\sqrt{2}}$ autoestado del autovalor $-a$

Puedo medir a o $-a$

$P(a||\psi(0)\rangle) = |\frac{\langle\psi(0)|u_2\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{\langle\psi(0)|u_3\rangle}{\sqrt{2}}|^2 + |\langle\psi(0)|u_1\rangle|^2$

$$= |\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}|^2 + |\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = 1$$

$P(-a||\psi(0)\rangle) = |\frac{\langle\psi(0)|u_2\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{\langle\psi(0)|u_3\rangle}{\sqrt{2}}|^2 = 0$

Luego de la medición el estado es $\Pi_a|\psi(0)\rangle$ con $\Pi_a = |u_1\rangle\langle u_1| + \frac{1}{2}(|u_2\rangle + |u_3\rangle)(\langle u_2| + \langle u_3|)$

$\Rightarrow \Pi_a|\psi(0)\rangle = |u_1\rangle\langle u_1| + \frac{1}{2}(|u_2\rangle\langle u_2| + |u_2\rangle\langle u_3| + |u_3\rangle\langle u_2| + |u_3\rangle\langle u_3|)|\psi(0)\rangle$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{4}|u_2\rangle + \frac{1}{4}|u_3\rangle + \frac{1}{4}|u_2\rangle + \frac{1}{4}|u_3\rangle$$

$\Pi_a|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle = |\psi(0)\rangle$ lo cual tiene sentido

NOTA

Diego Wallace

$B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ b autovalor con autoestados $|u_3\rangle$ y $\frac{|u_1\rangle + |u_2\rangle}{\sqrt{2}}$

$-b$ autovalor con autoestado $\frac{|u_1\rangle - |u_2\rangle}{\sqrt{2}}$

$P(-b\,||\psi(0)\rangle) = \left| \frac{\langle u_1|\psi(0)\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{\langle u_2|\psi(0)\rangle}{\sqrt{2}} \right|^2 = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{(2\sqrt{2}-2)^2}{16\cdot 2} = \frac{12-4\sqrt{2}}{32}$

$P(b\,||\psi(0)\rangle) = \frac{20+4\sqrt{2}}{32}$

Si mido $-b$ el estado luego de la medición es $\sqrt{\frac{32}{12-4\sqrt{2}}}\ \frac{1}{2}(|u_1\rangle - |u_2\rangle)(\langle u_1| - \langle u_2|)\,|\psi(0)\rangle$

$\Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2}\left(|u_1\rangle\langle u_1| - |u_2\rangle\langle u_1| - |u_1\rangle\langle u_2| + |u_2\rangle\langle u_2|\right)|\psi(0)\rangle$

$\Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle - \frac{1}{2}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}-2}\left(2|u_1\rangle - 2|u_2\rangle - \sqrt{2}|u_1\rangle + \sqrt{2}|u_2\rangle\right)$

$\Rightarrow \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2}|u_1\rangle + \frac{\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}-2}|u_2\rangle = \frac{|u_1\rangle - |u_2\rangle}{\sqrt{2}}$ que es el postulado 4 de la cuántica

Si mido b el estado queda $\sqrt{\frac{32}{20+4\sqrt{2}}}\left(|u_3\rangle\langle u_3| + \frac{1}{2}(|u_2\rangle + |u_1\rangle)(\langle u_1| + \langle u_2|)\right)|\psi(0)\rangle$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{32}{20+4\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2}|u_3\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_2\rangle + \frac{1}{4}|u_2\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{4}|u_1\rangle\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{20+4\sqrt{2}}}\left(2\sqrt{2}|u_3\rangle + (2+\sqrt{2})(|u_2\rangle + |u_1\rangle)\right)$

(c) $|\psi(t)\rangle = U(t,0)|\psi(0)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}|\psi(0)\rangle$

$= e^{-\frac{iHt}{\hbar}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle\right)$

$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{e^{-i2\omega_0 t}}{2}(|u_2\rangle + |u_3\rangle)$

Si mido H y obtengo $\hbar\omega_0 \Rightarrow |\hbar\omega_0(t)\rangle = e^{-i\omega_0 t}|u_1\rangle$

Si mido H y obtengo $2\hbar\omega_0 \Rightarrow |2\hbar\omega_0(t)\rangle = \frac{e^{-i2\omega_0 t}}{\sqrt{2}}(|u_2\rangle + |u_3\rangle)$

Si mido A a tiempos posteriores sigue resultando $|\psi(t)\rangle$

Si mido B y obtengo $b \Rightarrow |b(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{20+4\sqrt{2}}}\left[2\sqrt{2}e^{-i2\omega_0 t}|u_3\rangle + (2+\sqrt{2})(e^{-i2\omega_0 t}|u_2\rangle + e^{-i\omega_0 t}|u_1\rangle)\right]$

Si mido B y obtengo $-b \Rightarrow |-b(t)\rangle = \frac{e^{-i\omega_0 t}|u_1\rangle - e^{-i2\omega_0 t}|u_2\rangle}{\sqrt{2}}$

$\hat{A}|\psi(t)\rangle = a\frac{e^{-i\omega_0 t}}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + a\frac{e^{-i2\omega_0 t}}{2}(|u_2\rangle + |u_3\rangle) = a|\psi(t)\rangle$

si mido A a tiempo t siempre obtengo a lo cual tiene sentido ya que resalta que $|\psi(t)\rangle$ vive en el subespacio generado por autoestados asociados a a.

En cada caso los posibles autovalores medidos son los mismos; lo que variará con el tiempo (solo para H y B) es la probabilidad de medir cada autovalor en cada estado.

Diego Wallace

P2) $H = J\, \sigma_z \otimes \sigma_z$

a) $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} J \Rightarrow$ autovalores J y $-J$

$H|00\rangle = J|00\rangle$; $H|01\rangle = -J|01\rangle$; $H|10\rangle = -J|10\rangle$; $H|11\rangle = J|11\rangle$

$\Rightarrow$ autoestados $|00\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |11\rangle$ degenerados

$H = J(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) - J(|10\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 01|)$

b) $|\psi_0\rangle = |+,\hat{x}\rangle \otimes |+,\hat{x}\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(|00\rangle + |10\rangle + |01\rangle + |11\rangle)$

$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = U(t)|\psi_0\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{iHt}{\hbar}}|00\rangle + e^{-\frac{iHt}{\hbar}}|10\rangle + e^{-\frac{iHt}{\hbar}}|01\rangle + e^{-\frac{iHt}{\hbar}}|11\rangle\right)$

$= \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{iJt}{\hbar}}(|00\rangle + |11\rangle) + e^{\frac{iJt}{\hbar}}(|01\rangle + |10\rangle)\right]$

$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{-\frac{iJt}{\hbar}}}{\sqrt{2}}|\Phi^+\rangle + \frac{e^{\frac{iJt}{\hbar}}}{\sqrt{2}}|\Psi^+\rangle$

c) $|\psi(T)\rangle = \frac{e^{-\frac{iJ}{\hbar}\frac{\pi\hbar}{4J}}}{\sqrt{2}}|\Phi^+\rangle + \frac{e^{\frac{iJ}{\hbar}\frac{\pi\hbar}{4J}}}{\sqrt{2}}|\Psi^+\rangle$

$= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}|\Phi^+\rangle + \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}|\Psi^+\rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)\frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle + |10\rangle + |01\rangle) + \frac{i}{2\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle - |00\rangle - |11\rangle)$

$= \frac{1}{2}|+,\hat{x}\rangle \otimes |+,\hat{x}\rangle + \frac{i}{2}(|\Psi^+\rangle - |\Phi^+\rangle)$

El estado inicial es producto pero a tiempo T el estado es entrelazado

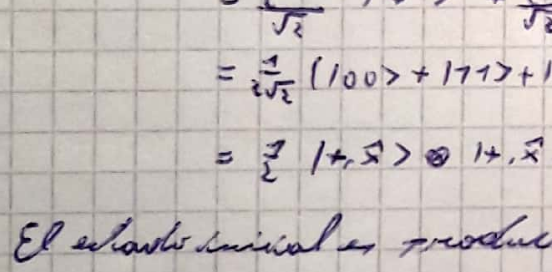
d) $\rho_A = tr_B(\rho_{AB}) = tr_B\left[\left(\frac{e^{-\frac{iJt}{\hbar}}}{\sqrt{2}}|\Phi^+\rangle + \frac{e^{\frac{iJt}{\hbar}}}{\sqrt{2}}|\Psi^+\rangle\right)\left(\frac{e^{\frac{iJt}{\hbar}}}{\sqrt{2}}\langle\Phi^+| + e^{-\frac{iJt}{\hbar}}\langle\Psi^+|\right)\right]$

$= tr_B\left[\left(\frac{1}{2}|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + \frac{e^{-\frac{2iJt}{\hbar}}}{2}|\Phi^+\rangle\langle\Psi^+| + \frac{e^{\frac{2iJt}{\hbar}}}{2}|\Psi^+\rangle\langle\Phi^+| + \frac{1}{2}|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|\right]$

$\Rightarrow \rho_A(t) = \frac{1}{4}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) + e^{-\frac{2iJt}{\hbar}}(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) + e^{\frac{2iJt}{\hbar}}(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) + \frac{1}{4}(|1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 0|)$

$\rho_A(t) = \frac{\mathbb{I}}{2} + \cos\left(\frac{2Jt}{\hbar}\right)\frac{\sigma_x}{2} \Rightarrow tr(\rho_A) = 1$ ✓

$tr(\rho_A^2) = tr\left(\frac{\mathbb{I}^2}{4} + \cos\frac{2Jt}{\hbar}\frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x^2}{4}\cos^2\left(\frac{2Jt}{\hbar}\right)\right) = \frac{1}{2} + \frac{\cos^2}{2}\left(\frac{2Jt}{\hbar}\right)$



A medida que transcurre t la parte A va de máx pureza a máximamente mixto. Esto se traduce a que el estado total evoluciona de un estado producto a uno entrelazado a producto de vuelta, cíclicamente.

Diego Wallace

© $tr(\rho^2(t)) = tr(\rho(t)\,\rho(t)) = tr(U\rho_0 U^+ U\rho_0 U^+) = tr(U\rho_0^2 U^+)$

$= tr(\rho_0^2 U^+ U) = Tr(\rho_0^2) = cte$

Pero esto sucede si la evolución $U(t)$ es unitaria

En este caso $tr(\rho_A^2) = \frac{1}{2} + \frac{\cos^2}{2}\left(\frac{2Jt}{\hbar}\right) \neq cte$

por lo que la evolución sobre el estado A no puede ser representado por un operador unitario => No vale la ec de Schrödinger para el primer spin por sí solo. (necesito un operador unitario.)