Física Teórica 2 – Primer cuatrimestre de 2020

Entrega Guía 6: Oscilador Armónico

Justifique claramente todas sus respuestas.

Estados *squeezed* del oscilador armónico

Considere una partícula en un potencial armónico unidimensional de frecuencia ω. Se define el operador de *squeezing* $S(r)$ como

$$S(r) = e^{\frac{r}{2}\left(a^2 - a^{\dagger 2}\right)},$$

donde $r \in \mathbb{R}$ y a y $a^\dagger$ son los operadores usuales de aniquilación y creación,

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right), \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right),$$

con x y p los operadores de posición y momento, respectivamente.

a. Verifique que $S(r)$ es unitario y que $S^{-1}(r) = S(-r)$.

b. Muestre que el operador de posición transformado por la transformación de *squeezing* es:

$$S^\dagger(r)\, x\, S(r) = e^{-r}\, x.$$

Análogamente, se puede mostrar que para el momento vale: $S^\dagger(r)\, p\, S(r) = e^r\, p$ (no es necesario demostrar este resultado para p, puede tomarlo como cierto).

En base a como transforman los operadores x y p, ¿cómo puede interpretar la acción de la transformación de *squeezing* $S(r)$?

c. Dado $r \in \mathbb{R}$, definimos los operadores

$$Q_r \equiv e^r x, \qquad P_r \equiv e^{-r} p, \qquad a_r \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x e^r + p\frac{i e^{-r}}{m\omega}\right).$$

Calcule $[Q_r, P_r]$ y $\left[a_r, a_r^\dagger\right]$. ¿Qué reglas de conmutación satisfacen estos operadores? Interprete. ¿Cómo se relacionan estos operadores con las transformaciones de *squeezing*?

d. Dado un estado coherente del oscilador armónico, $|\alpha\rangle$, definimos el estado coherente *squeezed* como: $|\alpha, r\rangle \equiv S(r)\,|\alpha\rangle$. Muestre que $|\alpha, r\rangle$ es autoestado del operador a_r. ¿Cuál es el autovalor correspondiente? Interprete.

e. Calcule el valor medio y varianza de la posición x y del momento p en el estado coherente *squeezed*, $|\alpha, r\rangle$. ¿Cuánto vale el producto de varianzas? ¿Qué nos dice esto sobre la función de onda de los estados? ¿Cómo puede interpretar (cualitativamente) el estado $|\alpha, r\rangle$?

f. Calcule el valor medio de la energía H en el estado $|\alpha, r\rangle$.
Sugerencia: use los resultados del ítem **b.** para obtener $S^\dagger(r)x^2S(r)$ y $S^\dagger(r)p^2S(r)$, sin necesidad de realizar cálculos adicionales.

g. Recordando que en la representación de Heisenberg el operador posición y momento en función del tiempo del oscilador armónico están dados por

$$x_H(t) = x\cos(\omega t) + \frac{p}{m\omega}\sin(\omega t), \qquad p_H(t) = p\cos(\omega t) - m\omega x\sin(\omega t),$$

calcule y grafique el valor medio y las varianzas de x y p en función del tiempo, es decir $\langle x(t)\rangle$, $\langle p(t)\rangle$, $\mathrm{Var}[x(t)]$ y $\mathrm{Var}[p(t)]$ para el estado $|0, r\rangle$. Calcule y grafique además el producto de varianzas $\mathrm{Var}[x(t)]\,\mathrm{Var}[p(t)]$. En particular, ¿qué obtiene a los tiempos $t = 0, \frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{\omega}$? Interprete.

Sin realizar ningún cálculo, ¿cómo espera que sea (cualitativamente) la evolución temporal del estado coherente *squeezed* general $|\alpha, r\rangle$?

Nota: Si durante los cálculos del problema les aparecen valores medios de operadores en estados coherentes, como $\langle\alpha|x|\alpha\rangle$, $\langle\alpha|x^2|\alpha\rangle$, $\langle\alpha|p|\alpha\rangle$, $\langle\alpha|p^2|\alpha\rangle$ y $\langle\alpha|H|\alpha\rangle$; les pedimos calculen explícitamente estos valores medios usando las propiedades de los estados coherentes. Para todo lo otro, pueden rehusar resultados ya demostrados en la Guía 6 y anteriores.