Física Teórica 2 - Guía 5: Dinámica

Federico Petrovich

20 de abril de 2021

Problema 9

Representación de Schrodinger

Primero se va a trabajar en representación de Schrodinger. En esta representación, el estado satisface la ecuación

$$\imath\hbar \frac{d}{dt} \left|\psi(t)\right\rangle = H(t) \left|\psi(t)\right\rangle \tag{1}$$

y por ende, si el Hamiltoniano no depende del tiempo se tiene que

$$\left|\psi(t)\right\rangle = e^{-\imath\frac{Ht}{\hbar}} \left|\psi(0)\right\rangle. \tag{2}$$

Esto implica que dado un operador

$$A = \sum_j a_j \left|a_j\right\rangle \left\langle a_j\right|, \tag{3}$$

la probabilidad de medir a_i dado $\left|\psi(t)\right\rangle$ está dada por

$$P\left(a_j|\psi(t)\right) = \left\langle \Pi_{a_j}\right\rangle = \left\langle\psi(t)\right| \Pi_{a_j} \left|\psi(t)\right\rangle = \left\langle\psi(0)\right| e^{\imath\frac{Ht}{\hbar}} \Pi_{a_j} e^{-\imath\frac{Ht}{\hbar}} \left|\psi(0)\right\rangle. \tag{4}$$

Por otro lado, si A conmuta con H, comparten una base de autoestados en común. Si el espectro de A es no degenerado, esta base no puede ser otra cosa mas que $\{\left|a_i\right\rangle\}$, lo cual implica

$$H\left|a_j\right\rangle = E_j \left|a_j\right\rangle \tag{5}$$

y por ende

$$e^{\imath\frac{Ht}{\hbar}} \left|a_j\right\rangle = e^{\imath\frac{E_jt}{\hbar}} \left|a_j\right\rangle \Leftrightarrow \left\langle a_j\right| e^{-\imath\frac{Ht}{\hbar}} = \left\langle a_j\right| e^{-\imath\frac{E_jt}{\hbar}}. \tag{6}$$

Luego,

$$e^{\imath\frac{Ht}{\hbar}} \Pi_{a_j} e^{-\imath\frac{Ht}{\hbar}} = e^{\imath\frac{Ht}{\hbar}} \left|a_j\right\rangle \left\langle a_j\right| e^{-\imath\frac{Ht}{\hbar}} = e^{\imath\frac{E_jt}{\hbar}} \left|a_j\right\rangle \left\langle a_j\right| e^{-\imath\frac{E_jt}{\hbar}} = \left|a_j\right\rangle \left\langle a_j\right| = \Pi_{a_j} \tag{7}$$

y por lo tanto

$$P\left(a_j|\psi(t)\right) = \left\langle\psi(0)\right| \Pi_{a_j} \left|\psi(0)\right\rangle = P\left(a_j|\psi(0)\right). \tag{8}$$

Como el operador A no depende del tiempo, tampoco lo hacen sus autovalores y por lo tanto el valor medio también resulta constante. Vale la pena aclarar que si el espectro es degenerado este resultado también se válido (basta con escribir los proyectores de A en la base de autoestados de H).

Representación de Heisenberg

En esta representación el resultado es más inmediato dado que

$$\left(\Pi_{a_j}\right)_H(t) = U^\dagger(t,0) \left(\Pi_{a_j}\right)_S(0)\, U(t,0) = e^{\imath\frac{Ht}{\hbar}} \Pi_{a_j} e^{-\imath\frac{Ht}{\hbar}} = \Pi_{a_j} = \left(\Pi_{a_j}\right)_H(0). \tag{9}$$

Luego,

$$P\left(a_j|\psi\right)(t) = \left\langle\psi(0)\right| \left(\Pi_{a_j}\right)_H(t) \left|\psi(0)\right\rangle = \left\langle\psi(0)\right| \left(\Pi_{a_j}\right)_H(0) \left|\psi(0)\right\rangle = P\left(a_j|\psi\right)(0). \tag{10}$$

Por la misma razón que antes, el valor medio tampoco depende del tiempo.